

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**TARIFICATION DANS LES RÉSEAUX DE
TÉLÉCOMMUNICATIONS: UNE APPROCHE PAR
PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE À DEUX NIVEAUX**

**HENRILIO JULSAIN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
MARS 1999**



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-42910-5

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

**TARIFICATION DANS LES RÉSEAUX DE
TÉLÉCOMMUNICATIONS: UNE APPROCHE PAR
PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE À DEUX NIVEAUX**

présenté par: JULSAIN Henrilio

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. SOUMIS François, Ph.D., président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme. SANSÓ Brunilde, Ph.D, membre et codirectrice de recherche

M. GIRARD André, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Nulle œuvre ne peut être construite de façon isolée. De loin ou de près, des gens ou des institutions ont apporté leur soutien à l'auteur. En effet, j'ai réalisé ce travail dans des conditions spéciales où, loin de mes parents, j'ai été soutenu financièrement par une institution canadienne, encadré par un directeur et une codirectrice très compréhensifs. Je peux dire que tout était là pour que je puisse réaliser ces études.

Je dois avant tout, en tant que chrétien, remercier le Dieu tout puissant pour sa présence dans ma vie quotidienne durant ces années loin de ma terre natale. Mes remerciements vont particulièrement au Programme Canadien de Bourse pour la Francophonie (PCBF) qui, grâce à son soutien financier, me permet de réaliser ces études qui ont mené à ce travail.

J'aimerais spécialement remercier mes directeurs de recherche, Gilles Savard et Brunilde Sansó, pour leur compréhension, leur aide et leurs conseils tant scientifiques que sociaux. De plus, ils ont été les premiers de la communauté universitaire qui m'ont reçu et m'ont parlé des réalités universitaire et sociale du Québec, des facteurs très importants pour la réussite d'un étudiant étranger.

Je veux aussi remercier mon frère aîné Luders Julsain qui a toujours trouvé les mots d'encouragement qu'il faut lorsque je traversais des moments terriblement difficiles. De plus, je veux aussi dire merci à Luders pour toutes les fois qu'il a comblé le vide créé par mon absence durant les jours très difficiles vécus par notre famille.

Finalement, mes remerciements vont à l'inestimable et inoubliable Louise Orphise Jeudiné, à Roosevelt, mon cousin, et Charole, ma sœur, pour leur contribution dans la réussite de mes études à Montréal.

RÉSUMÉ

Le principal but de ce travail est l'étude du problème de tarification qui se pose à une compagnie qui vient d'acheter, louer ou construire de nouvelles lignes de transmission dans un réseau de télécommunications. On déterminera le prix que cette nouvelle compagnie doit charger aux usagers du réseau qui, pour chaque paire origine-destination, ont la possibilité d'utiliser un chemin formé par des arcs des autres compagnies. Ces prix optimiseront au mieux le revenu de la compagnie et le coût des usagers qui est défini par le coût de l'écoulement de chaque commodité sur les arcs ajouté à un équivalent-coût du délai de l'arc utilisé. L'équivalent-coût du délai permet de minimiser le délai total sur le réseau, facteur définissant la qualité de services pour les usagers. Les services fournis sont du type commutation de paquets.

Pour déterminer les prix par unité de flot, on modélisera le problème en utilisant le paradigme de la programmation mathématique à deux niveaux. Le programme au premier niveau modélise le problème de maximisation de revenu de la compagnie, et le programme de second niveau est un problème d'acheminement de flots dans un réseau paramétré par le prix (variable de premier niveau) qui minimise le coût des usagers. Sous des hypothèses rencontrées en pratique, le programme à deux niveaux est transformé en un programme d'un seul niveau en remplaçant le problème du suiveur par ses conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker. On propose deux approches de résolution pour ce problème.

La première approche, de type Gauss-Seidel, détermine un point d'équilibre entre la compagnie et les usagers. Ce point d'équilibre est trouvé selon un algorithme qui itère entre deux sous-problèmes. Le premier sous-problème est le problème d'acheminement des usagers, et le second est un programme linéaire obtenu en substituant

le flot optimal des usagers dans le programme d'un seul niveau. La seconde approche est exacte et détermine la solution optimale du problème en transformant le programme d'un seul niveau non linéaire en un programme linéaire en nombres entiers par approximation des expressions liées au délai et linéarisation des contraintes de complémentarité. De cette approche découlent deux modèles. Le premier modèle détermine des prix qui peuvent varier par commodité et par arc, alors que le second impose un même prix pour toutes les commodités.

Ce mémoire se termine par un ensemble de résultats numériques sur un réseau ARPA.

ABSTRACT

The main goal of this thesis is to study the pricing problem that a company faces when buying, renting or building new transmission lines in a telecommunication network. We will determine the price that the new company would have to charge the network users who, for each pair, have the possibility of using a path consisting of other companies edges. These prices will optimize the company's revenue and the users cost defined as the flow cost of each commodity on the edges added to the cost-equivalent of the delay of the edge used. The cost-equivalent of delay enables us to minimize the total delay on the network a factor which defines the quality of the services for the users. The services offered are of the "store and forward" type.

To determine the price per flow unit, we will present the problem as a model using the bilevel mathematical programming paradigm. The first level program modelizes the revenue maximization problem for the company, and the second level of the program is a routing problem in a network parameterized by the price (a first level variable) which minimizes the users cost. Under weak assumptions, the two level program is transformed into a one level program by replacing the follower's problem with his optimization conditions of Kuhn-Tucker. We propose two approaches to resolve this problem.

The first approach, Gauss-Seidel type, determines an equilibrium point between the company and the users. This equilibrium point is found by an algorithm which iterates between two subproblems. The first subproblem is the routing problem of users, and the second is a linearized program obtained by the substitution of the users optimal flow for the routing in the one level program. The second approach determines the optimal solution of the problem by transferring the one level non linear program

in an linear integer programming by approximating the function delay expressions as piecewise linear functions and by linearizing the complementarity constraints. From this approach, we find two models, a model that determines a price that may vary between commodities and arcs, and another which determines for an arc the same price for each commodity.

At the end, numerical results will be presented for an ARPA network.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES SIGLES	xv
LISTE DES ANNEXES	xvi
CHAPITRE 1: Introduction	1
CHAPITRE 2: Problématique et revue de la littérature	4
2.1 Problématique	4
2.2 Conception d'un réseau de télécommunication	6
2.3 Revue de la littérature	10
2.3.1 La programmation mathématique à deux niveaux	10
2.3.2 La tarification en télécommunications	17
2.4 Conclusion	23
CHAPITRE 3: Modélisation et propriétés mathématiques	24

3.1	Introduction	24
3.2	Formulation	24
3.2.1	Formulation: flot-arc	27
3.2.2	Formulation: chemin-flot	30
3.3	Propriétés mathématiques	32
3.3.1	Quelques définitions liées à la PDN	32
3.3.2	Existence de la solution du problème du suiveur	34
3.3.3	Propriétés de la fonction au premier niveau	35
3.4	Transformation du modèle	36
3.4.1	Conditions d'optimalité du premier ordre au second niveau	36
3.5	Condition d'optimalité sur les prix	37
3.6	Conclusion	41
	CHAPITRE 4: Méthodes de résolution	42
4.1	Introduction	42
4.2	Approche par décomposition prix-flots	43
4.2.1	Détermination du flot optimal	44
4.2.2	Détermination du prix optimal	48
4.3	Approche par linéarisation et nombres entiers	51
4.3.1	Reformulation de l'objectif du programme d'un seul niveau	52

4.3.2	Transformation des contraintes de complémentarité	54
4.3.3	Linéarisation de la fonction de délai	56
4.3.4	Modèle MIP2: prix uniforme sur les arcs	59
4.4	Conclusion	60
CHAPITRE 5: Analyse des résultats		61
5.1	Introduction	61
5.2	Comparaison des deux approches de résolution	62
5.3	Analyse de la méthode en nombre entiers	71
5.4	Conclusion	79
CHAPITRE 6: Conclusions et recommandations		81
RÉFÉRENCES		84
ANNEXE		88

LISTE DES TABLEAUX

5.1	Prix sur les arcs de A_2 (arcs de prix connus)	64
5.2	Chemins et revenus pour les problèmes P_1, P_2, P_3	66
5.3	Suite du tableau 5.2 résultats pour le problème P_4	67
5.4	Prix pour un exemple ayant quatre paires du problème P_4 ($C_a = 5$)	68
5.5	Valeurs des revenus optimaux pour les différents scénarios et les différents modèles	69
5.6	Temps de résolution en seconde pour les quatre problèmes	70
5.7	Chemins et revenu pour le problème P_4 avec capacité $C_a = 4$	71
5.8	Types d'exploration et temps de résolution	72
5.9	Types d'exploration et temps de résolution	73
5.10	Types de branchement et prix optimal pour la paire 1-21	73
5.11	Temps de résolution et variation de la demande pour NEPD	75
5.12	Temps de résolution et variation de la demande pour NEPI	76
5.13	Temps de résolution et valeur optimale des deux modèles en nombres entiers par rapport au nombre d'intervalles d'approximation pour les paires 1-21, 2-9 et 7-4.	77

5.14 Temps de résolution et valeur optimale du modèle NEPD par rapport au nombre d'intervalles d'approximation pour les paires 1-21, 2-9, 7-4, 21-8, 4-15, et 12-3.	78
5.15 Relation entre M et le temps de résolution pour NEPD	79
5.16 Relation entre M et le temps de résolution pour NEPI	79
A.1 Les prix optimaux pour les trois modèles du problème P_1	89
A.2 Les prix optimaux pour les trois modèles du problème P_2	90
A.3 Les prix optimaux pour les trois modèles du problème P_3	91

LISTE DES FIGURES

2.1	Exemple d'un réseau ayant plusieurs compagnies offrant des services . . .	8
4.1	Étapes de l'approche par décomposition Prix-Flots pour l'itération i . . .	43
4.2	Courbes du gradient et du produit du flot par le gradient pour $C=5$. . .	56
5.1	Topologie du réseau ARPA de 21 nœuds et 26 arcs	63
5.2	Approximation du gradient du délai pour une capacité égale à 5	65
5.3	Courbe du revenu optimal en fonction de la congestion: NEPD-six paires	74
5.4	Courbe du revenu optimal en fonction de la congestion: NEPD-sept paires	75
5.5	Courbe du revenu optimal en fonction de la congestion: NEPI-trois paires	76

LISTE DES SIGLES

TOT: Tarification Optimale en Télécommunications

PDN: Programme à deux niveaux

PLDN: Programme linéaire à deux niveaux

DPF: Décomposition Prix-Flots

NEPD: Nombres entiers avec prix différents sur les arcs pour chaque paire

NEPI: Nombres entiers avec prix identiques sur les arcs pour chaque paire

LISTE DES ANNEXES

Annexe A: Tableaux des prix pour les problème P_1 , P_2 et P_3	89
--	----

CHAPITRE 1

Introduction

Les changements technologiques dans les réseaux de télécommunications de ces dernières années, les nouveaux besoins imposés par la mondialisation de l'économie, l'ouverture des marchés de télécommunications à la concurrence imposent aux acteurs évoluant sur ce marché de nouvelles façons de penser et d'agir. Ces nouvelles façons de penser et d'agir englobent en particulier le processus de planification d'un réseau de télécommunications. Ce processus se divise en plusieurs étapes qui se chevauchent. Le processus commence à la conception topologique qui sert d'input au problème de dimensionnement qui est lié d'une façon réciproque au problème de routage. Et aujourd'hui, la concurrence ajoute une nouvelle étape dans ce processus: c'est le problème de la tarification des usagers qui utilisent le réseau.

Chaque jour, de nouveaux acteurs apparaissent sur le marché des télécommunications. Ils peuvent être soit des usagers ayant de nouveaux besoins, soit des compagnies avec de nouveaux services. L'arrivée de cette dernière catégorie d'acteurs est facilitée par la concurrence instaurée depuis le congrès de Vienne déréglementant l'industrie des télécommunications. Cette situation, actuellement non monopoliste, donne également la possibilité aux usagers de choisir la compagnie qui offre le meilleur prix avec la meilleure qualité de services. Cette augmentation de pouvoir des usagers oblige les compagnies à poser le problème de la vérité des prix pour l'acheminement des flots des utilisateurs du réseau.

Traditionnellement, les prix étaient déterminés par des techniques basées sur le coût de production marginal, sur le nombre de Ramsey, ou encore sur des concepts de prix incitatifs. Ces méthodes présentent de grandes limites. Par exemple, la première

peut engendrer des déficits dans le système suite à l'hypothèse de production à pleine capacité, et de la non prise en compte des coûts fixes. Pour la deuxième, il faut des données qui sont très difficiles à calculer ou à obtenir, particulièrement les élasticités croisées (élasticité de la demande d'un service par rapport au prix d'un autre service). Enfin, le prix incitatif est basé sur la fonction d'utilité des consommateurs qui est souvent difficile à définir puisque cette dernière tient compte des facteurs qualitatifs des consommateurs. De plus, toutes ces méthodes ne captent pas l'aspect compétitif existant entre la compagnie et les usagers, ces derniers ayant maintenant la possibilité de choisir une autre compagnie pour acheminer leur flot.

Le but de ce travail est de développer un modèle de tarification basé sur le paradigme de la programmation mathématique à deux niveaux où la réaction des consommateurs est explicitement prise en compte. Un tel modèle fournira le (les) prix par unité de flot qui maximise(nt) le revenu d'une nouvelle compagnie entrant dans le marché des télécommunications. En contrepartie, les flots choisis par les consommateurs sur ces nouvelles lignes dépendent de ces derniers prix. La nature opposée des objectifs de la compagnie et des usagers présente le problème comme un véritable jeu compétitif non coopératif. Il faut aussi noter que dans ce jeu, les décisions sont prises séquentiellement, car la compagnie, comme leader du jeu, fixe les prix d'acheminement du flot sur ses arcs, alors que les usagers, en tant que suiveurs, choisissent la valeur du flot à acheminer. Pour ce type de problèmes, la programmation mathématique à deux niveaux est un outil de modélisation particulièrement bien adapté. Au premier niveau, la compagnie veut déterminer les prix qui maximisent son revenu, tandis qu'au deuxième niveau, les usagers cherchent un vecteur de flots qui minimise leur coût étant donnés les prix de la compagnie.

Ce travail est organisé comme suit. Le deuxième chapitre présente la problématique sous-jacente au problème de tarification dans un réseau de télécommunications, suivi d'une revue de la littérature en deux volets. Le premier volet portera sur la

programmation mathématique à deux niveaux et le deuxième volet sur les modèles de tarification en télécommunications déjà présentés dans la littérature scientifique. Les modèles mathématiques sont présentés au chapitre 3 ainsi que leurs propriétés mathématiques. On termine ce chapitre par quelques reformulations des modèles de base. Au quatrième chapitre, on décrit deux approches de résolution pour le problème de tarification. Les résultats sont présentés au chapitre 5. Nous concluons au chapitre 6 en explorant les limites de notre travail et les nouvelles voies de recherches qu'il ouvre dans le domaine de la tarification dans les réseaux de télécommunications.

CHAPITRE 2

Problématique et revue de la littérature

Ce chapitre se divise en deux parties. On présente d'abord la problématique de la tarification dans les réseaux de télécommunications. Une synthèse bibliographique sur la programmation mathématique à deux niveaux et la tarification dans les réseaux de télécommunications est ensuite présentée. Le chapitre se termine en esquisant l'originalité de notre modèle de tarification dans ce domaine.

2.1 Problématique

Si vers la fin du dix-neuvième siècle, la télécommunication se résumait à la communication par télégraphe, aujourd'hui elle englobe un ensemble de technologies qui permettent de transférer la voix, les données, les images, etc., et est devenue, dans notre société, un domaine incontournable tant du point collectif qu'individuel. Le rôle économique et social des télécommunications est maintenant indéniable et les grandes institutions économiques internationales commencent à la considérer comme un indicateur de développement fiable. Une étude réalisée par Dholakia et Harlam (1994) sur la relation qui existe entre les investissements dans les infrastructures de télécommunications et le développement économique aux USA révèle une corrélation positive entre ces deux variables. Certains pays y consacrent actuellement de grands investissements afin de demeurer compétitifs dans ce domaine.

L'émergence de nouvelles technologies dans le domaine des télécommunications amène des changements de comportements tant pour les consommateurs que pour

les compagnies de télécommunications. Les utilisateurs se voient régulièrement offrir de nouveaux services comme, par exemple, le service Internet, les télécopieurs, les services de traitements d'images et la téléconférence.

Les compagnies, de leur côté, bénéficient de cette croissance technologique pour satisfaire la demande grandissante des consommateurs, car l'avènement des technologies telles que la fibre optique, les commutateurs rapides, la micro-électronique, la numérisation de la voie et des images permet d'offrir simultanément, sur un même réseau de télécommunications, tous les services demandés. Un autre élément technologique, présenté par Gavish (1991), favorisant la croissance du secteur des télécommunications est la convergence du domaine téléphonique avec celui des ordinateurs.

En plus du développement technologique dans le domaine des télécommunications, on doit noter le vaste mouvement de libéralisation des marchés qui, sous diverses formes, a touché plusieurs pays. Ce mouvement engendre une certaine déréglementation à l'intérieur du marché des télécommunications. Les compagnies doivent penser maintenant d'une façon internationale car des concurrents nationaux et étrangers ont droit à leurs différentes ressources. Ce marché qui, autrefois, était géré par un monopole souvent étatique, est maintenant ouvert à la concurrence. Les compagnies cherchent à acquérir la plus grande part de marché pour maximiser leurs revenus, tandis que les usagers peuvent choisir la compagnie qui leur permet de minimiser leurs dépenses tout en ayant un service de bonne qualité. Cette augmentation de pouvoir des usagers porte les compagnies à poser le problème des prix dans le processus de conception d'un réseau.

Un réseau de télécommunications est modélisé dans sa forme la plus simple comme un graphe dont les nœuds sont les centres de commutation et les arcs sont les lignes de transmission. Les arcs sont supposés bidirectionnels. L'un des importants problèmes dans la conception d'un réseau est le problème d'acheminement. Les concepteurs de certains réseaux ont adopté une méthode d'acheminement statique ou

semi-dynamique. Dans ces réseaux, les routes pour chaque paire de nœuds communiquant sont pré-définies. Le choix des routes entre les paires de nœuds est très important pour le calcul du temps de réponse exigé par les usagers et joue un rôle très significatif dans l'utilisation des ressources du réseau. A l'heure actuelle, à cause de l'existence de la compétition sur un réseau de télécommunications, les problèmes de maximisation du revenu des compagnies fonctionnant sur le réseau et de la minimisation des dépenses des usagers utilisant les ressources influencent le choix des routes entre une paire de nœuds.

2.2 Conception d'un réseau de télécommunication

Gavish (1991) définit le processus de conception d'un réseau dans l'industrie des télécommunications comme un processus long et complexe qui peut être séparé en trois principales étapes: concevoir la topologie du réseau, déterminer l'allocation de capacité et faire le routage du trafic. Le processus itératif commence après avoir fixé un ensemble de paramètres qui assurent que le réseau résultant offrira des services de bonne qualité à un prix respectant les règles de la concurrence. Plus précisément, la conception d'un réseau de télécommunication peut être faite à travers les étapes suivantes:

1. Définition des exigences à respecter:

- caractéristiques externes du trafic;
- politique de routage;
- les coûts des matériaux;
- les contraintes technologiques;
- les contraintes de budget, de performance et de fiabilité.

2. La conception proprement dite;

- la conception topologique;
- le dimensionnement;
- le routage.

Ces étapes sont souvent réalisées à l'aide de modèles d'optimisation qui sont généralement de nature combinatoire et non linéaires. Même si ces étapes sont souvent traitées de façon séquentielle, l'objectif final doit permettre d'optimiser au mieux des critères tels que le délai, les pertes d'appels et particulièrement le coût total du réseau que la compagnie va transférer en partie aux usagers sous forme de prix par unité d'appel. Dans le passé, et devant un marché captif, la minimisation des coûts permettait de fixer des prix qui maximisaient le revenu des compagnies. Aujourd'hui, le développement technologique qui baisse le coût d'offre en télécommunications (Kelly, Solomon et Walker (1997)) et la déréglementation qui ouvre ce marché à la concurrence exigent de nouvelles méthodes d'optimisation du revenu des compagnies. *Si autrefois les clients étaient obligés d'accepter le prix et le service de la compagnie, aujourd'hui l'existence sur un même réseau de plusieurs compagnies élimine cette limite pour les usagers. Ils peuvent refuser l'offre d'une compagnie pour s'abonner à une autre lui offrant de meilleurs services à un prix minimisant leur coût. Dans le processus d'optimisation de son revenu, la compagnie doit charger aux utilisateurs des prix par unité de flot qui respectent les principes de la concurrence.*

Par exemple, une nouvelle compagnie qui veut taxer les flots sur les arcs b et c de la figure 2.1 alors que les paires $(1,3)$ et $(4,2)$ ont une demande non nulle doit le faire en prenant en considération la présence des arcs a , d et e appartenant à d'autres compagnies. Si les prix sur les arcs b et c du nouvel offreur de service sont trop élevés, les usagers utiliseront le chemin 1-4-3 pour la paire $(1,3)$ et le chemin 4-1-2 pour la paire $(4,2)$, car les chemins auxquels appartiennent les arcs taxables

1-3, 4-2 : OD ayant une demande non nulle
 b, c : arcs taxables
 a, d, e : arcs de coûts connus

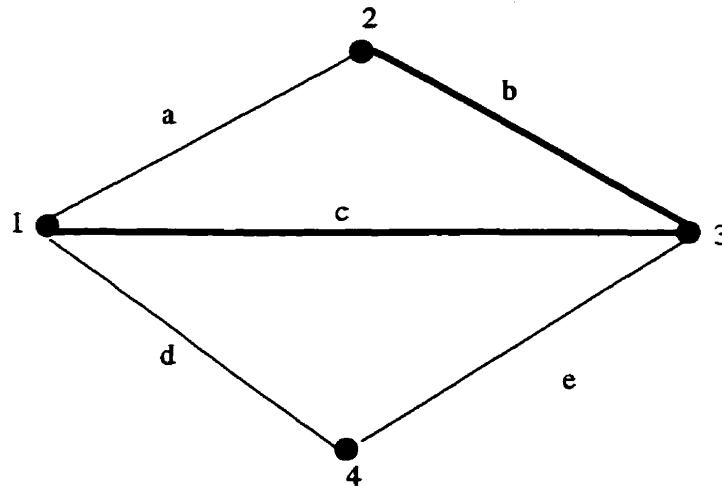


Figure 2.1 – Exemple d'un réseau ayant plusieurs compagnies offrant des services

ont un coût plus élevé que ceux n'ayant que les arcs de prix constants (le coût d'un chemin est la somme des coûts des arcs qui le composent). Dans ce cas, le revenu de la nouvelle compagnie sera nul, car la demande des usagers a été satisfaite sans utiliser les chemins qui contiennent ses arcs (en supposant que les chemins 1-4-3 et 4-1-2 ont assez de capacité pour les flots). À noter que nous avons utilisé le terme *arcs taxables* pour indiquer les arcs dont nous déterminons le prix. Cette terminologie sera utilisée tout au long du mémoire.

Ainsi, une nouvelle compagnie sur le réseau doit connaître la fonction de demande des consommateurs pour atteindre son objectif, car son revenu dépend du vecteur prix (selon les commodités, l'heure de la journée, etc.) et du vecteur flot que les usagers acheminent sur les liens. Et ce flot dépend aussi du prix. Ainsi, maximiser le revenu revient à maximiser la fonction $R(w) = wf(w)$ où $f(w)$ est la fonction de demande des usagers en fonction du prix du routage w d'une unité de flot. Il est souvent difficile de connaître cette fonction sous sa forme fermée ou explicite. Il est par contre

possible de modéliser la réaction optimale ou rationnelle des consommateurs à l'aide d'un programme mathématique où la fonction d'utilité de ces derniers est minimisée. Ce programme mathématique fournit ainsi la fonction de demande d'une façon implicite. Le paradigme de la programmation mathématique à deux niveaux permet à la nouvelle compagnie de capter le comportement optimal ou rationnel des consommateurs. Dans notre modèle, le comportement optimal des usagers définissant leur fonction de demande a deux composantes. Une composante prend en considération le coût de l'écoulement du flot sur les liens et l'autre composante reflète la qualité de service qui est toujours une variable de la fonction d'utilité des consommateurs. Pour la transformation en unité monétaire du comportement optimal des consommateurs, la composante liée à la qualité de service est considérée comme un coût que les consommateurs se sont imposés pour une minimisation du délai dans le réseau. Ainsi, le programme mathématique qui modélise le problème de tarification dans les réseaux de télécommunications peut être vu comme un modèle mathématique à deux niveaux. Le programme au premier niveau maximise le revenu de la nouvelle compagnie en prenant comme contrainte la solution optimale d'un autre programme mathématique, appelé programme du second niveau, qui optimise la fonction d'utilité des usagers définie quantitativement par les coûts totaux pour l'utilisation des lignes de transmission.

Ce modèle est expliqué intuitivement par la présence de deux ensembles disjoints d'arcs dans un réseau de télécommunications, un ensemble d'arcs noté x , appartenant au nouveau fournisseur de services, dont les prix des flots sont à déterminer et un ensemble noté y dont les prix \bar{w} sont connus et appartenant aux fournisseurs de service déjà établis sur le réseau. Les vecteurs flots x et y constituent le vecteur flot qui est la solution d'un problème de multiflot. On doit déterminer le vecteur prix w associé aux arcs de x qui maximise le revenu de la nouvelle compagnie; pendant que les utilisateurs doivent choisir les vecteurs x et y qui minimisent leur coût pour

le vecteur w de la compagnie. Il faut noter, pour permettre au prix w d'être borné supérieurement, qu'entre chaque paire origine-destination il y a un chemin qui ne contient que des arcs de y . Alors le modèle se présente ainsi:

$$\max_w wx, \quad (2.1)$$

s.à:

$$\min_{x,y} f(x,y) + wx + \bar{w}y, \quad (2.2)$$

s.à:

$$Ax + By = D, \quad (2.3)$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad w \geq 0.$$

où l'équation de conservation de flots dans le réseau est représentée par la contrainte (2.3), $f(x,y)$ est la composante qui représente la qualité de service dans le réseau, A et B sont respectivement les matrices d'incidence pour les arcs du nouvel offreur de service et des arcs des fournisseurs déjà établis et D le vecteur de demande des usagers.

2.3 Revue de la littérature

2.3.1 La programmation mathématique à deux niveaux

Le problème de programmation mathématique à deux niveaux est apparu vers la fin des années 70 et consiste en une séquence de deux problèmes d'optimisation où le domaine réalisable du premier est déterminé implicitement par la solution du second. Formellement, un problème de programmation mathématique à deux niveaux se formalise comme étant la minimisation d'un premier programme mathématique où un sous-ensemble des variables est solution optimale d'un second programme mathématique paramétré. Sous sa forme la plus générale, il se présente ainsi:

$$\min_x f^1(x,y), \quad (2.4)$$

s.à

$$g^1(x, y) \leq 0, \quad (2.5)$$

$$\min_y f^2(x, y), \quad (2.6)$$

s.à

$$g^2(x, y) \leq 0. \quad (2.7)$$

Le problème du second niveau définit implicitement, pour un vecteur x fixé, le vecteur y par la relation

$$y \in \arg \min_y f^2(x, y) \quad (2.8)$$

s.à

$$g^2(x, y) \leq 0. \quad (2.9)$$

Le problème de premier niveau est défini par les équations 2.4 et 2.5 et celui du deuxième niveau par 2.6 et 2.7. La relation définie par 2.8 et 2.9 implique que le vecteur y est déterminé après que le vecteur x ait été fixé. C'est dans cette optique que le vecteur x est souvent appelé vecteur de premier niveau et le vecteur y , vecteur du second niveau.

Il faut souligner, dans la formulation ci-dessus, la présence des contraintes couplantes au premier et au deuxième niveau. La première formulation d'un programme mathématique à deux niveaux, écrite par Candler et Norton (1977), ne contenait pas les contraintes de premier niveau. Pour cela, on l'appelait la formulation particulière. C'est Aiyoshi et Shimizu (1981) qui ont introduit la formulation générale. L'utilisation des contraintes du premier niveau est souvent nécessaire à une modélisation réaliste.

Depuis son introduction, la programmation mathématique à deux niveaux suscite un intérêt toujours croissant. Ce modèle constitue un outil particulièrement bien adapté pour la modélisation de situations où les agents agissent de façon non coopérative et les décisions sont prises de façon séquentielle. Il faut noter que les agents

interviennent dans un système hiérarchisé et leurs intérêts peuvent être communs ou conflictuels.

La classe des problèmes de programmation mathématique à deux niveaux la plus étudiée a été celle dont toutes les fonctions sont linéaires, c'est-à-dire les fonctions de coûts et les contraintes sont linéaires. Ce type de programmes s'appelle programmation linéaire à deux niveaux (PLDN). Les programmes linéaires à deux niveaux sont des problèmes non convexes et peuvent être aussi non connexes. Ils sont classés dans la catégorie des problèmes fortement NP-complets. Hansen, Jaumard et Savard (1992) ont démontré que les programmes linéaires à deux niveaux sont NP-complets en réduisant KERNEL à un problème min-max linéaire, un cas particulier au PLDN.

Plusieurs types d'algorithme de résolution ont été développés pour les PLDN. En admettant que le domaine réalisable du PLDN est compact et $M(x)$ (ensemble de solutions optimales du problème au second niveau pour une valeur fixée de la variable de premier niveau) est univoque, Bialas et Karwan (1982), Bard (1984a), Bard (1984b) et Candler et Towsley (1982) ont étudié les propriétés de la formulation particulière du PLDN. A partir de ces propriétés, ils ont développé des algorithmes basés sur une énumération implicite des sommets du domaine réalisable. Savard (1988) a fait la généralisation de ces propriétés pour la formulation générale et ceci, sans hypothèse de compacité et d'univocité. Ces propriétés stipulent qu'une solution optimale, si elle existe, d'un programme linéaire à deux niveaux se trouve toujours en un sommet de l'ensemble réalisable du problème.

Une technique très utilisée pour résoudre les problèmes de programmation à deux niveaux consiste à substituer le problème de second niveau par les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker. Le programme obtenu a un seul niveau, mais contient des contraintes de complémentarité qui rendent le problème non convexe. Fortuny et McCarl (1982) ont transformé le nouveau programme en un problème de programmation en nombres entiers mixte en utilisant de nouvelles variables qui permettent d'éliminer

les contraintes de complémentarité. Des algorithmes de Bard et Falk (1982), et de Bard et Moore (1990) ont aussi utilisé une méthode de séparation et d'évaluation progressive pour résoudre les programmes à deux niveaux linéaires.

La méthode de séparation et d'évaluation progressive de Bard et Moore (1990) commence par la résolution d'un programme linéaire relaxé obtenu en omettant les conditions de complémentarité $\mu y = 0$ (μ variable de Kuhn-Tucker et y variable du second niveau). Si la solution trouvée vérifie les conditions de complémentarité, alors on a une solution optimale du PLDN. Si non, il existe au moins une paire μ_i et y_i qui soit strictement positive. L'algorithme choisit une paire de telles variables et génère les nœuds d'un arbre de séparation et d'évaluation progressive. Après avoir choisi le nœud, on résout le programme linéaire obtenu par la relaxation des conditions de complémentarité en ajoutant les contraintes de la forme $\mu_{ik} = 0$ ou $y_{ik} = 0$ correspondant aux variables qui ont été choisies dans les nœuds appartenant à la chaîne du nœud courant à la racine de l'arbre.

Une autre approche de la méthode d'évaluation et de séparation progressive a été développée par Hansen, Jaumard et Savard (1992) et constitue actuellement l'approche la plus efficace pour résoudre cette classe de problèmes. L'algorithme qu'ils proposent exploite les propriétés de monotonie des fonctions du problème et une élimination successive des variables de second niveau. Ces propriétés sont définies par deux principes de monotonie. Le premier principe de monotonie affirme que si un coefficient d_j^2 des variables de second niveau de la fonction économique du suiveur est négatif, alors à l'optimalité, soit une variable y_j est nulle, soit au moins une contrainte i contenant un coefficient B_{ij}^2 négatif est serrée (on note B_{ij}^2 le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice B^2 qui multiplie les variables y). Si le coefficient de la fonction économique est positif, alors nécessairement au moins une contrainte k avec un coefficient B_{kj}^2 positif est serrée. Le second principe affirme que si le coefficient d_j^2 est nul, alors soit la conclusion du premier principe pour un

coefficient s'applique soit celle avec un coefficient négatif s'applique. Ces conditions permettent de tester des sous-problèmes pour lesquels les contraintes ne peuvent pas être satisfaites. L'utilisation des variables booléennes constitue une façon pratique de dire si une contrainte i est serrée ou pas. A cet effet, une variable booléenne α_i sera associée à chaque contrainte. Elle vaut 1 si la contrainte est vérifiée à l'égalité et 0 sinon. Ces deux valeurs permettent de définir un principe de séparation pour construire un arbre d'énumération à partir des contraintes de second niveau.

Parallèlement aux méthodes d'énumération implicite, Faustino et Jùdice (1992) ont développé un algorithme basé sur la résolution séquentielle des problèmes de complémentarité linéaires. Cette méthode consiste à résoudre une séquence de problèmes de complémentarité linéaires (SLCP) en utilisant une méthode d'énumération hybride. A partir d'un programme linéaire à deux niveaux particuliers, ils ont écrit $LCP(\lambda)$. L'optimum global du programme linéaire à deux niveaux est la solution du $LCP(\bar{\lambda})$, où $\bar{\lambda}$ est la plus petite valeur de λ tel que $LCP(\lambda)$ a une solution. Pour trouver la solution optimale, la méthode commence à résoudre un $LCP(\lambda_0)$ obtenu à partir de $LCP(\lambda)$ et résout une séquence de $LCP(\lambda_k)$ où $\{\lambda_k\}$ est une suite décroissante. L'efficacité de l'algorithme SLCP dépend de la méthode de résolution de $LCP(\lambda)$. La méthode utilisée dans ce cas est une méthode d'énumération hybride.

Önal (1993) a présenté une heuristique basée sur une modification de la méthode du simplexe pour résoudre un programme linéaire à deux niveaux. Dans cette méthode de résolution, il a aussi remplacé le problème du second niveau par les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker. Mais les équations d'écart complémentaire qui apparaissent dans le nouveau modèle sont déplacées dans la fonction objectif du premier niveau comme une fonction de pénalité qui est multipliée par une très grande constante. Le programme résultant est quadratique et non convexe. L'optimum du programme quadratique résultant est atteint en un point extrême du domaine réalisable par une application itérative du simplexe modifié. L'algorithme emploie des méthodes de cal-

cul et travaille d'une façon très similaire à l'algorithme du simplexe avec une petite modification dans la procédure à cause du terme quadratique dans la fonction objectif.

Même si les méthodes de résolution des programmes linéaires sont plus courantes, des méthodes de résolution pour des programmes non linéaires ont été aussi développées. Comme les PLDN, les programmes à deux niveaux non linéaires sont non convexes et très difficiles à résoudre. Une méthode utilisée pour résoudre les problèmes non linéaires à deux niveaux est la méthode de descente. La technique de descente a été utilisée par Jùdice, Savard et Vicente (1994) et Gauvin et Savard (1994) pour résoudre les problèmes quadratiques à deux niveaux. Les algorithmes énumératifs de Bard et Moore (1990), de Hansen, Jaumard et Savard (1992) et la méthode séquentielle des problèmes de complémentarité linéaire de Faustino et Jùdice (1992) conçus pour des programmes linéaires peuvent aussi résoudre les programmes quadratiques dont les contraintes et la fonction objectif du meneur sont linéaires et la fonction objectif du suiveur est quadratique convexe. Pour les cas où les contraintes constituent un polyèdre convexe, la fonction de deuxième niveau est quadratique convexe et celle du premier niveau est quadratique, Jùdice, Savard et Vicente (1994) ont proposé deux algorithmes de descente pour les résoudre. Un premier algorithme est basé sur une suite de pivots modifiés qui engendrent des déplacements directs le long de la région induite, définie par les conditions d'optimalité du problème du second niveau. La procédure commence en un point initial de la région induite. Soit D l'ensemble des directions de descente en ce point, on choisit une direction de descente qui permet de passer en un autre sommet de la région induite. Ce point est utilisé pour la nouvelle itération. Si en un point (\bar{x}, \bar{y}) d'une itération k , D est vide, alors le point est un minimum local. Si D est non vide et il n'existe en (\bar{x}, \bar{y}) aucune direction de descente qui améliore l'objectif de premier niveau on dit que ce point est un point stationnaire de la région induite. L'algorithme termine toujours au moins avec un point stationnaire, mais si D est vide, on est assuré d'un minimum local. Face à cette

faillie de l'algorithme, ils ont proposé une autre méthode de descente.

Pour le deuxième algorithme, au cours d'une itération k , la direction de descente est calculée à partir d'un programme à deux niveaux linéaire/quadratique dont les composantes de la direction de descente sont les variables du programme. Dans la matrice de coefficients de x et y pour les contraintes, seules les colonnes qui définissent les contraintes actives au point (x_k, y_k) sont considérées. Si la valeur optimale de l'objectif du modèle quadratique linéaire est non négative, alors le point (x_k, y_k) est optimal, sinon la direction de descente est trouvée et un nouveau point est calculé pour une nouvelle itération. La méthode séquentielle LCP est utilisée pour déterminer la direction de descente.

Un algorithme classique de descente a été proposé par Kolstad et Lasdon (1990) pour des programmes non linéaires. Cet algorithme consiste à appliquer une méthode de descente, en considérant que la fonction $y(x)$ est presque partout différentiable, au problème d'optimisation implicite défini par:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & F(x, y(x)) \\ \text{s.à} \quad & g(x, y(x)) \leq 0 \end{aligned}$$

où $\{y(x)\}$ est l'ensemble de réactions du suiveur pour toutes les valeurs de x . Ils ont introduit une estimation locale du gradient de y et appliqué l'algorithme quasi-Newton à la solution de la version non-contrainte de ce problème.

La validité de la substitution du programme de second niveau par les conditions d'optimalité dépend de l'hypothèse de régularité admise pour le problème au second niveau. Chen et Florian (1995) ont étudié les conditions de régularité et d'optimalité des problèmes de programmation mathématique à deux niveaux. Ils ont étudié les conditions de régularité et d'optimalité en utilisant la fonction marginale définie par la fonction valeur optimale du problème du second niveau. Ils étudient la question de la régularité en explorant les cônes tangents de l'ensemble réalisable du problème.

Pour de plus amples informations au sujet de la programmation mathématique à deux niveaux, une lecture du livre de Bard, Ishizuka et Shimizu (1997), de celui de Luo, Pang et Ralph (1996), et la revue bibliographique de Calamai et Vicente (1994) est conseillée.

2.3.2 La tarification en télécommunications

La déréglementation dans le secteur des télécommunications a amené les concepteurs de réseaux à réexaminer en profondeur les modèles de tarification. Autrefois, le prix d'une application en télécommunication se résumait aux frais exigés aux utilisateurs pour une communication téléphonique. Ces prix étaient calculés suivant une tendance basée sur un monopole étatique. Aujourd'hui, l'intégration de plusieurs services et la présence de plusieurs compagnies concurrentes sur le même réseau rendent le problème plus complexe. Dans la littérature des télécommunications, plusieurs auteurs ont présenté des modèles de tarification pour les réseaux ATM à intégration de services.

Kelly, Solomon et Walker (1997) ont étudié le problème de la tarification dans le nouvel environnement IP/ATM. Après avoir présenté l'histoire de la tarification en télécommunication, les caractéristiques de l'ATM et ses incidences sur le problème de prix dans les réseaux de télécommunications, ils ont proposé un nouveau modèle de calcul de prix qui reflète les caractéristiques des réseaux numériques à intégrations de service. La structure de tarification proposée est indépendante de la durée et de la distance. Le modèle proposé a deux composantes: une composante pour la charge d'accès et une autre pour la charge d'usage. La composante d'usage est proportionnelle au volume de trafic, à la classe du trafic et à la qualité de service de la connexion. Ils ont divisé les services en quatre grandes classes qui dépendent de l'utilisation des bits sur le réseau. Dans cet article, l'aspect concurrentiel du marché n'a pas été considéré et les techniques de calcul des prix n'ont pas été révélées.

Cocchi *et al.* (1993) ont étudié le problème des prix d'un simple réseau qui offre des services multiples, chaque service ayant son propre critère de performance. Ils présentent un modèle qui montre que, en comparaison d'un prix unique pour tous les services, un programme de prix lié au type de service (importance, performance) permet d'augmenter le surplus social de chaque consommateur pour chaque service utilisé, et en même temps de générer des profits suffisants pour les fournisseurs de services. Ils utilisent des concepts économiques, particulièrement les fonctions d'utilité décrivant le comportement des usagers et la théorie de l'équilibre de Nash qui permet d'étudier le jeu entre les services. Gardant le niveau général de revenu fixe, et mesurant le surplus social des consommateurs comme une fonction du coût et de la qualité de service reçu, ils trouvent dans chacune des configurations de réseau simulées qu'on peut avoir un prix par service tel que les utilisateurs de chaque type d'applications soient plus satisfaits qu'un schéma de prix unique et fait une utilisation qui maximise le niveau de performance globale du réseau. Pour des raisons de simplicité, ils ont simplement considéré que les usagers peuvent varier la classe de service qu'ils demandent, c'est-à-dire leur volume de trafic est constant, et ont considéré des critères normatifs pour déterminer les prix sans tenir compte que les prix pourraient être le résultat d'une structure de compétition ou de régulation. Cette hypothèse rend leur modèle différent du nôtre qui ne considère pas séparément chaque service du réseau mais détermine les prix par unité de flot selon une compétition existant sur le marché des télécommunications.

Mendelson et Wang (1990) ont présenté un système qui est modélisé comme un système de file d'attente $M/M/1$ avec plusieurs classes de services. Chaque service est caractérisé par son coût de délai par unité de temps et par son temps d'utilisation. Ils cherchent un mécanisme de prix qui est optimal et compatible au comportement des utilisateurs. Cela signifie que les taux d'arrivées des services et leurs priorités d'exécution maximisent simultanément la valeur nette du système en considérant

l'objectif individuel. Cela étant, pendant que chaque usager planifie individuellement pour maximiser son utilité personnelle, leurs décisions maximisent l'objectif du système entier. En minimisant le coût de délai dans le réseau, ils résolvent simultanément le problème de coût de ressource qui détermine le taux d'arrivée des données pour chaque classe de service, et le prix de chaque service qui détermine la priorité d'acheminement des données avec le plus petit délai. En définitif ce modèle permet de déterminer le prix des services suivant leur importance pour l'utilisateur, mais sans tenir compte du revenu des compagnies et de la concurrence. Si notre modèle ne prend pas en considération la présence de plusieurs services sur le réseau, l'aspect compétitif et le revenu des compagnies sont considérés tout en optimisant les coûts (coût du délai et coût d'usage des arcs) des utilisateurs définissant leur surplus social.

Wang, Peha et Sirbu (1995) ont examiné aussi le problème de prix optimal dans les réseaux numériques à intégration de services. Dans leur approche, le prix optimal pour chaque service est déterminé à partir de l'élasticité de la demande pour le service, et du coût d'opportunité d'offre du service. Le coût d'opportunité est déterminé par les objectifs de performance et le patron de trafic. Ils ont considéré un opérateur qui maximise le profit total pour une période composée de plusieurs sous-périodes. La planification rationnelle de la période consiste à choisir un programme de prix pour les différents services, et la largeur de bande qui maximisent la fonction objectif de l'opérateur. Ils proposent une procédure en trois étapes pour trouver une solution proche de l'optimalité, définie comme suit: à la première étape, un problème d'investissement optimal à long terme est résolu pour trouver la largeur de bande totale ainsi que la probabilité de blocage qui sont fonction du type de service et de la sous-période considérée. En prenant ces valeurs comme fixées, une politique de prix optimal est déterminée à la seconde étape. Les résultats de cette étape montrent que le prix optimal pour un service sera une fonction du coût d'opportunité d'offre de ce service. Le coût d'opportunité est déterminé à la fois pour les caractéristiques du

service et les prix réels de réserve et d'utilisation de la largeur de bande. Ils donnent des valeurs d'essai aux prix réels et mettent au point un programme de prix pour chaque service garanti. À partir de ces programmes de prix, la charge de trafic pour les services garantis peut être déterminée. Sous une charge donnée de trafic des services garantis, ils formulent, à la troisième étape, un modèle plus précis pour décrire les services non-garantis à chaque moment. Les prix directs pour ces services sont alors dérivés pour maximiser le revenu de ces services. À partir de ces prix directs, on peut alors déterminer la valeur instantanée de la capacité à utiliser. Ces informations sont employées comme feedback à la seconde étape pour ajuster les prix calculés précédemment. Le processus continue jusqu'à ce que les prix pour tous les services se stabilisent.

Girard et Zidane (1995) ont présenté un modèle de conception de réseau numérique à intégration de services à large bande (RNIS-LB) à l'aide d'un modèle de maximisation de revenu généré par le réseau. Deux types de trafic sont offerts par le réseau. Le routage est alternatif et avec partage de charge. La fonction objectif correspond au revenu total qui est la somme des revenus générés par chaque classe d'appels. Le revenu d'une classe d'appels est le produit du prix de cette classe par le volume d'appels non perdu par le prix unitaire constant. Les contraintes sont formées par le système d'équations définissant les points fixes d'Erlang et les équations qui traduisent le fait qu'un appel bloqué sur une chaîne trouve nécessairement une chaîne alternative. Une heuristique en deux phases, de type Gauss-Seidel, est proposée afin de résoudre le problème reformulé à l'aide des conditions de Kuhn-Tucker. La première phase tire profit du fait que, si les multiplicateurs de Kuhn-Tucker et les probabilités de blocage des arcs sont connus, les équations d'optimalité correspondent à celles du problème de multiflot non linéaire où l'objectif à minimiser correspond au Lagrangien du modèle. La seconde partie de l'algorithme permet de calculer les variables de Kuhn-Tucker quand les flots et les probabilités de blocage sont connus. L'algorithme

de cette solution heuristique proposée dans cet article est du même type que celui présenté par Girard (1993). Ils alternent entre une étape de résolution du problème de détournement du flot (Frank-Wolfe), et une étape où ils résolvent un système linéaire pour obtenir de nouveaux multiplicateurs tout en recalculant la probabilité de blocage des liens. Dans l'étape de déviation du flot, les multiplicateurs sont fixes et le flot se déplace de la chaîne ayant le plus petit revenu net à la chaîne ayant le plus grand revenu jusqu'à ce que la fonction objectif soit maximisée dans cette direction. Il n'y a aucune garantie que cette méthode converge, mais s'il y a convergence la solution vérifie les conditions de Kuhn-Tucker pour le problème d'optimisation de l'acheminement. Une solution optimale, si elle existe, vérifie la règle du revenu marginal qui est une condition bien connue dans les problèmes de multiflot. Ce modèle présenté n'est pas un modèle de tarification, c'est plutôt un modèle de maximisation de revenu de la compagnie avec contrainte de qualité de services exprimée par la minimisation des pertes d'appels. Dans ce modèle, le comportement des consommateurs et la présence de plusieurs compagnies sur le réseau ne sont pas considérés. Ces deux caractéristiques constituent la base de notre travail qui prend aussi les prix comme des variables.

Bencheick (1997) a développé un modèle qui permet de fixer les tarifs dans un réseau numérique à intégration de services pour un réseau ayant deux classes de trafic. Il est formulé comme un modèle de programmation à deux niveaux qui met en présence deux agents: un fournisseur qui veut maximiser son revenu en déterminant le prix de location ou de vente des liens spécialisés à une compagnie qui a la possibilité d'utiliser le réseau public commuté et la compagnie qui doit concevoir son réseau en minimisant le coût qu'elle va charger aux usagers sous forme de prix par unité d'appels. Les prix tiendront compte de chaque service utilisé par les usagers. Il présente d'abord le modèle qui optimise l'acheminement et le dimensionnement en minimisant le coût total du réseau. La résolution de cette partie utilise l'algorithme décrit par Girard et Zidane (1995). Cette méthode de résolution est utilisée parce

qu'elle permet de résoudre des problèmes de grande taille, mais sa convergence n'est pas assurée. Ensuite, le coût minimal est réparti entre les différents services offerts par le réseau en utilisant le prix de Shapley. Tel que formulé, le problème de tarification sur réseau peut être vu comme un jeu coopératif où les joueurs sont les types de services qui, par leur intégration au sein d'un même réseau, cherchent à minimiser le coût d'écoulement du trafic global. Ce modèle est très proche du nôtre. Même si l'utilisation du paradigme de la programmation mathématique à deux niveaux n'est pas directe, la conception globale du modèle le reflète un peu. Ici les agents sont le fournisseur de liens spécialisés et la compagnie conceptrice. Dans notre modèle la concurrence est entre les compagnies sur le réseau et les consommateurs.

Un regard rétrospectif sur tous les modèles présentés permet de voir que la différence principale entre ces derniers et notre modèle réside dans la prise en considération de la compétition entre les fournisseurs de services et les consommateurs. Notre modèle détermine le prix optimal qui maximise le revenu d'un fournisseur de services en prenant implicitement en considération la réaction des consommateurs modélisée par leur coût. Alors le modèle de tarification en télécommunication permet à une compagnie de maximiser son revenu (fonction du prix w et du flot f) en tenant compte du flot optimal des usagers paramétré par le prix de la compagnie. La situation peut être exprimée comme suit:

$$\max_{w, f} R(w, f) \quad (2.10)$$

$$\text{s.à } (w, f) \in \Omega \quad (2.11)$$

$$f \in O(w) \quad (2.12)$$

où $O(w)$ est l'ensemble des solutions optimales du problème d'acheminement que les usagers doivent résoudre pour minimiser le coût d'écoulement de leur flot pour un prix w fixé, c'est-à-dire

$$O(w) = \operatorname{argmin}_f D(w, f) \quad (2.13)$$

$$\text{s.à } (w, f) \in \Omega_s \quad (2.14)$$

où $D(w, f)$ est la fonction de coût des usagers, et Ω_s est l'ensemble des flots réalisables des usagers pour un prix w . Ce modèle est une extension du modèle de tarification dans les réseaux routiers développé par Labbé, Marcotte et Savard (1998)

2.4 Conclusion

Le problème de la tarification dans les réseaux de télécommunications a toujours été pris en considération par les concepteurs des réseaux. Cependant, les modèles généralement développés reflétaient une réalité non compétitive entre les fournisseurs de services et les usagers. Aujourd'hui, face à un marché non captif, tout modèle de tarification pour le marché des télécommunications doit concilier les objectifs des fournisseurs de services et des usagers. Pour cela, un programme mathématique à deux niveaux est utilisé pour modéliser le problème de tarification posé à une compagnie qui vient de s'établir sur un réseau ayant d'autres compagnies dont leurs prix sont déjà fixés. Dans ce modèle, on maximise au premier niveau le revenu de la compagnie, et au deuxième niveau on minimise les coûts des usagers (paramétrés par le prix de la compagnie) qui ont deux composantes. Une première composante est la dépense pour l'usage du réseau et la deuxième composante est un équivalent-coût qui minimise le délai sur le réseau, facteur définissant la qualité de services.

CHAPITRE 3

Modélisation et propriétés mathématiques

3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre le modèle mathématique qui permet la maximisation des revenus du meneur (la compagnie) en prenant en considération la réaction rationnelle des suiveurs (les usagers). La réaction rationnelle des usagers est la solution d'un problème d'acheminement paramétré par le prix du meneur. Deux formulations seront présentées: une formulation arc-flot et une formulation chemin-flot. Dans la formulation arc-flot, les variables de second niveau seront les flots sur les arcs, et dans la formulation chemin-flot, les variables seront les flots sur les chemins. Après avoir présenté certaines définitions de la programmation mathématique à deux niveaux, et étudié les propriétés mathématiques du modèle, on termine le chapitre avec un modèle d'un seul niveau obtenu à l'aide des conditions d'optimalité du second niveau.

3.2 Formulation

Nous considérons le problème de choix de route optimale dans un réseau de télécommunications dans lequel les nœuds, les lignes de transmission, la vitesse de transmission, les caractéristiques du trafic externe sont données. Les messages sont transmis d'un nœud origine vers un nœud destination à travers des nœuds intermédiaires. Le problème est donc de trouver la route la plus appropriée pour que le trafic soit écoulé. Si nous considérons le trafic d'une origine à une destination comme étant

une commodité, alors notre but est de trouver les routes qui, simultanément, minimisent la dépense des usagers et maximisent le revenu d'une compagnie qui vient de s'établir sur le réseau. Dans ce modèle, non seulement les routes des usagers sont choisies mais aussi les prix qu'une nouvelle compagnie doit charger aux usagers par unité de flot. Les prix sont déterminés en prenant en considération l'hypothèse qu'entre chaque paire origine-destination il y a au moins un chemin qui ne contient aucun arc de la nouvelle compagnie. Si cette hypothèse n'était pas vérifiée, et que la demande était captive, la solution serait non bornée.

Le programme mathématique qui modélise le problème de tarification est un programme mathématique à deux niveaux. Le programme au premier niveau permet de déterminer le revenu optimal du leader, tandis que celui du second niveau minimise les coûts des usagers. Le revenu de la compagnie est le produit du vecteur prix par le vecteur flot sur les arcs de la compagnie. Le coût des usagers est la somme de deux composantes:

1. la somme encourue pour l'utilisation du réseau, c'est-à-dire la somme des coûts sur les arcs. Le coût sur un arc est la somme des produits de chaque commodité par son prix unitaire,
2. un équivalent-coût de la qualité de service. Cette composante modélise le fait que le temps d'attente d'un appel sur un arc augmente lorsque le flot total de l'arc s'approche de la capacité.

Les messages entrant dans un réseau subissent un temps de délai à cause de la vitesse de transmission finie des liens, et de la file d'attente existant aux nœuds intermédiaires. Les délais de transmission et d'attente sont modélisés comme un réseau de file d'attente $M/M/1$ dans lequel les liens sont considérés comme des serveurs dont le taux de service est proportionnel à sa capacité et les messages sont traités comme des clients dont les nœuds du réseau sont l'aire d'attente. Le délai sur un arc dépend

du flot sur l'arc; ainsi plus le flot se rapproche de la capacité, plus le délai sur l'arc augmente. Cette pénalité constitue un facteur qui incite les usagers à utiliser le réseau durant les heures de faibles demandes.

Avant de développer les formulations de notre modèle TOT (Tarification Optimale en Télécommunications), introduisons les notations générales.

Notation

Soit un réseau $G(N, A)$ de n nœuds et m arcs. On a:

- N : ensembles des nœuds du réseau;
- A : ensemble des arcs du réseau, $a \in A$;
- A_1 : ensemble des arcs appartenant à la nouvelle compagnie (arcs taxables);
- A_2 : ensemble des arcs appartenant aux autres compagnies, avec $A_2 \cap A_1 = \emptyset$;
- P : ensemble des paires $p \in P$ du réseau avec $p = (i, j)$, i étant l'origine notée O_p et j la destination notée D_p ;
- i^- : quand un arc se termine au nœud i : $i^- = \{(k, i) : k \in N\}$,
- i^+ : quand un arc commence au nœud i : $i^+ = \{(i, k) : k \in N\}$,
- R : matrice de demande définie par $R = [r_p]$ telle que $r_p \geq 0$, $p = (i, j)$ est une paire et r_p demande de la paire p ;
- $\bar{\alpha}_a$: la pénalité constante par unité de délai sur l'arc a , $a \in A$;
- w_a^p : le coût par unité de flots de la paire p traversant l'arc $a \in A_1$;
- \bar{w}_a^p : prix constant de l'unité de flots de la paire p traversant l'arc $a \in A_2$;
- C_a : capacité de l'arc a en [bits/sec], $a \in A$;
- f_a : flot total sur l'arc a en [bits/sec], $a \in A$;
- f_a^p : flot de la paire p sur l'arc a en [bits/sec], $a \in A$;
- $\frac{1}{\mu}$: longueur moyenne des messages en [bits/messages]
- p_a : délai de propagation de l'arc $a \in A$;
- p'_a : fonction de délai de propagation ($p'_a = \mu p_a$);
- C : l'ensemble de chemins $c \in C$ sur le réseau;
- C_p : l'ensemble de chemins pour une paire $p \in P$;
- f^c : le flot pour le chemin $c \in C$, quantité de données de i vers j portée par un chemin entre ces deux nœuds en [bits/sec].

Les symboles i^+ et i^- permettent de traduire mathématiquement le caractère bidirectionnel des arcs. Ainsi, chaque arc est décomposé en deux arcs orientés de sens opposé.

3.2.1 Formulation: flot-arc

Problème d'acheminement

Le problème du suiveur est considéré comme un problème d'acheminement où l'on doit calculer le vecteur flot qui minimise les coûts (le prix de l'écoulement des flots supposé connu). Ce type de problème a été étudié par plusieurs auteurs dans la littérature (Fratta, Gerla et Kleinrock (1973)), (Gavish et Hantler (1983)) et (Bertsekas et Gallager (1987)). Notre modèle est basé sur celui développé par Fratta, Gerla et Kleinrock (1973).

Considérons un réseau de communication de type *commutation de paquets*. Dans ce genre de réseau, les arcs peuvent être modélisés par des files d'attente. Les demandes de messages apparaissent en un temps aléatoire et les messages sont de longueur aléatoire. Les flots sur les arcs et les longueurs des files d'attente dans les nœuds sont donc des variables aléatoires. En supposant que le taux d'arrivée des messages aux nœuds suit une loi de Poisson, que la longueur des messages aux files d'attente suit une distribution exponentielle, que les processus d'arrivée des messages aux différents nœuds sont indépendants des temps de service (hypothèse de Kleinrock), il est possible de déterminer (suivant une approximation) le délai moyen sur un arc en fonction du flot total sur l'arc. Ainsi le délai moyen sur le réseau, noté T , est défini par la relation suivante:

$$T(f) = \frac{1}{\gamma} \sum_{a \in A} \left(\frac{f_a}{C_a - f_a} + f_a p'_a \right), \quad (3.1)$$

où p'_a est une fonction du délai de propagation et γ la demande totale du réseau. En supposant que le délai de propagation sur tout arc est négligeable vis à vis du du délai de la file d'attente, la relation devient:

$$T(f) = \frac{1}{\gamma} \sum_{a \in A} \frac{f_a}{C_a - f_a}. \quad (3.2)$$

Si en tant qu'utilisateurs, on s'impose une pénalité $\bar{\alpha}_a \geq 0$ pour chaque unité de délai

créée sur l'arc a , le coût lié à la qualité de service sera:

$$D_1(f) = \frac{1}{\gamma} \sum_{a \in A} \bar{\alpha}_a \frac{f_a}{C_a - f_a}. \quad (3.3)$$

Le coût pour l'écoulement des flots sur les arcs se compose de deux parties. La première partie correspond au coût sur les arcs de l'ensemble A_1 (prix à déterminer) et la deuxième au coût sur les arcs de l'ensemble A_2 (prix \bar{w}_a^p connus).

$$D_2(f) = \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1} w_a^p f_a^p + \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_2} \bar{w}_a^p f_a^p. \quad (3.4)$$

Ainsi le modèle mathématique décrivant le problème du suiveur s'écrit :

$$\min_f D_a(f, w) = \sum_{a \in A} \frac{1}{\gamma} \bar{\alpha}_a \left(\frac{f_a}{C_a - f_a} \right) + \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1} w_a^p f_a^p + \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_2} \bar{w}_a^p f_a^p, \quad (3.5)$$

où f est le vecteur de flots ($f = (f_a)_{a \in A}$) à travers le réseau qui doit satisfaire les contraintes suivantes:

– conservation de flots aux nœuds

$$\sum_{a \in i^+} f_a^p - \sum_{a \in i^-} f_a^p = \begin{cases} r_p & \text{si } i = O_p \\ -r_p & \text{si } i = D_p \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \forall p \in P, \quad \forall i \in N; \quad (3.6)$$

– non négativité des flots sur les arcs:

$$f_a^p \geq 0 \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in A \quad (3.7)$$

– les contraintes de capacité:

$$\sum_{p \in P} f_a^p \leq C_a, \quad \forall a \in A; \quad (3.8)$$

– la contrainte de flot total sur un arc qui est:

$$f_a = \sum_{p \in P} f_a^p, \quad \forall a \in A. \quad (3.9)$$

La forme fonctionnelle du délai sur un arc du réseau nous permet de ne pas prendre en considération les contraintes de capacité des arcs puisqu'elle agit comme barrière si le flot tend vers la capacité.

Problème du fournisseur

Le programme au premier niveau maximise le revenu de la compagnie en prenant le prix (revenu) par unité de flot comme variable de décision:

$$\max_w R(w, f) = \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1} w_a^p f_a^p \quad (3.10)$$

sous les contraintes suivantes:

$$w_a^p \geq 0, \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in A_1. \quad (3.11)$$

La contrainte de non négativité sur w_a^p ne sera pas toujours prise en considération. En effet, dans les méthodes de résolution développées au chapitre 4, les prix sont des variables non négatives dans la méthode de décomposition de type Gauss-Seidel mais ils correspondent à des variables libres dans l'approche en nombres entiers.

Le modèle de tarification arc-flot est donc:

$$(TOT1) \quad \max_w R(w, f) = \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1} w_a^p f_a^p \quad (3.12)$$

s.à

$$w_a^p \geq 0, \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in A_1, \quad (3.13)$$

$$\min_f D_\alpha(f, w) = \sum_{a \in A} \bar{\alpha}_a \left(\frac{f_a}{C_a - f_a} \right) + \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1} w_a^p f_a^p + \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_2} \bar{w}_a^p f_a^p \quad (3.14)$$

s.à

$$\sum_{a \in i^+} f_a^p - \sum_{a \in i^-} f_a^p = \begin{cases} r_p & \text{si } i = O_p \\ -r_p & \text{si } i = D_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall i \in N, \quad \forall p \in P, \quad (3.15)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} f_a^p, \quad \forall a \in A, \quad (3.16)$$

$$f_a^p \geq 0, \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in A. \quad (3.17)$$

Il faut remarquer que le modèle (TOT) est un programme mathématique à deux niveaux particulier. En plus du fait qu'il n'y a pas de contraintes au premier niveau, le programme du second niveau est paramétré par les variables de premier niveau seulement dans l'objectif, les contraintes de second niveau étant indépendantes de w .

Nombre de variables et de contraintes

Le nombre de variables et de contraintes est directement proportionnel au nombre de sites de commutation (les nœuds du graphe) et au nombre de lignes de transmission (les arcs) appartenant à la nouvelle compagnie. S'il y a n sites de commutation dont $|P|$ font un transfert de flots; alors on a:

– Nombre de variables

Variables de flot-paire $f_a^p : |P| * |A|$

Variables de prix $w_a^p : |P| * |A_1|$

Variables de flot total: $|A|$

– Nombre de contraintes

Non négativité des flots: $|P| * |A|$

Non négativité des prix: $|P| * |A_1|$

Conservation de flots: $|P|n$

3.2.2 Formulation: chemin-flot

Il est possible de reformuler le modèle TOT1 en considérant les variables flot-chemin selon les mêmes idées que Bertsekas et Gallager (1987) et Gavish et Hantler (1983). On obtient:

$$(TOT2) \quad \max_w R(w, f) = \sum_{p \in P} \sum_{c \in C_p} w_a^c f^c \quad (3.18)$$

s.à

$$w_a^c = \sum_{\{a \in c : a \in A_1\}} w_a^p \quad \forall c \in C_p \quad p \in P, \quad (3.19)$$

$$w_a^p \geq 0, \quad \forall a \in A_1, \quad \forall p \in P, \quad (3.20)$$

$$\min_f D_\alpha(f, w) = \sum_{a \in A} \bar{\alpha}_a \left(\frac{f_a}{C_a - f_a} \right) + \sum_{p \in P} \sum_{c \in C_p} w_a^c f^c + \sum_{p \in P} \sum_{c \in C_p} \sum_{\{a \in c : a \in A_2\}} \tilde{w}_a^p f^c \quad (3.21)$$

s.à

$$\sum_{c \in C_p} f^c = r_p \quad \forall p \in P, \quad (3.22)$$

$$f^c \geq 0 \quad \forall c \in C, \quad (3.23)$$

$$f_a = \sum_{\{c : a \in c\}} f^c, \quad \forall a \in A. \quad (3.24)$$

où w_a^c est le prix sur une chaîne d'une unité de flot et est égal à la somme des prix par unité de flot sur les arcs a appartenant à la chaîne c . La remarque que nous avons faite pour (TOT1) concernant l'indépendance des contraintes de second niveau est valable pour le programme (TOT2).

Pour cette formulation le nombre de variables et de contraintes est:

– Nombre de variables

Variables de flot-chaîne $f_c : |C|$

Variables de prix $w_a^p : |P| * |A_1|$

Variables de flot total: $|A|$

– Nombre de contraintes

Non négativité des flots: $|C|$

Non négativité des prix: $|P| * |A_1|$

Conservation de flots: $|P|$

3.3 Propriétés mathématiques

On s'intéresse dans cette section aux propriétés mathématiques du modèle TOT1. On présente d'abord les définitions relatives aux ensembles et aux points particuliers d'un programme à deux niveaux. Ensuite, on étudie l'existence et l'unicité de la solution optimale pour le problème de second niveau. Et enfin le problème à deux niveaux est reformulé comme un problème à un seul niveau.

3.3.1 Quelques définitions liées à la PDN

Comme on l'a déjà remarqué, le programme qui modélise le problème de tarification est un cas particulier de programme mathématique à deux niveaux car on remarque que l'ensemble réalisable du second niveau est indépendant des variables de premier niveau. Ainsi, certaines définitions du domaine deviennent triviales ou plus simples. Étant donné les contraintes définies par les équations (3.12) à (3.17) (notées par $g(f)$) du problème de deuxième niveau du modèle TOT1, on a les définitions suivantes:

- Domaine réalisable du problème

$$\Omega = \{(w, f) \in \mathbf{R}_+^{|P||A_1|} \times \mathbf{R}_+^{|P||A|} \mid g(f) \leq 0 \text{ et } w_a^p \geq 0\}. \quad (3.25)$$

- Trace du domaine réalisable

La trace du PDN est la projection du domaine réalisable sur l'espace de décision du leader (nouvelle compagnie du réseau); elle est notée Ω_w^2 :

$$\Omega_w^2 = \{w \in \mathbf{R}_+^{|P||A_1|} \mid \exists f \in \mathbf{R}_+^{|P||A|} \text{ avec } g(f) \leq 0\}. \quad (3.26)$$

Comme l'ensemble réalisable du problème de second niveau est indépendant de w , alors Ω_w^2 se résume à $\{w \in \mathbf{R}_+^{|P||A_1|}\}$.

– Domaine réalisable au second niveau

Le domaine réalisable du problème de second niveau pour w fixé est:

$$\Omega_f(w) = \{f \in \mathbf{R}_+^{|P||A|} \mid g(f) \leq 0\}. \quad (3.27)$$

– Ensemble de solutions optimales du suiveur

L'ensemble de solutions optimales du suiveur (utilisateur du réseau) pour $w \in \Omega_w^2$ fixé est:

$$M(w) = \{f \in \mathbf{R}_+^{|P||A|} \mid f \in \operatorname{argmin} D_\alpha(w, f), f \in \Omega_f(w)\}. \quad (3.28)$$

– Fonction valeur optimale du suiveur

La fonction valeur optimale du problème de second niveau pour un vecteur de prix $w \in \Omega_w^2$ fixé est :

$$v(w) = D_\alpha(w, f), f \in M(w). \quad (3.29)$$

– Domaine induit

On appelle domaine induit l'ensemble

$$DI = \{(w, f), \mid (w, f) \in \Omega, f \in M(w)\}. \quad (3.30)$$

– Point réalisable

Un point (w, f) est un point réalisable si $(w, f) \in \Omega$

– Point rationnel

Un point (w, f) est un point rationnel si $(w, f) \in DI$

– Solution optimale du problème

Une solution optimale du problème PDN est un point (w^*, f^*) tel que:

1. (w^*, f^*) est un point rationnel, c'est-à-dire

– le point (w^*, f^*) est réalisable pour le problème,

- f^* est le flot optimal du problème d'acheminement des utilisateurs qui veulent minimiser leur dépense pour un vecteur de prix w^* .

2. $\forall (w, f) \in DI$ on a $R(w^*, f^*) \geq R(w, f)$

3.3.2 Existence de la solution du problème du suiveur

Pour un vecteur de prix fixé par le leader, le programme de second niveau se ramène à un problème d'acheminement optimal où les coûts sont minimisés. La fonction objectif étant séparable par arc, alors on peut étudier les propriétés du coût sur un arc pour généraliser ensuite les propriétés au coût total qui est la somme des coûts sur chaque arc.

La fonction de dépense pour un arc utilisé $D_a^a(w, f) = \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{\alpha}_a f_a}{(C_a - f_a)} + \sum_{p \in P} w_a^p f_a^p$ est une fonction de f_a , continûment différentiable et est définie sur l'intervalle $[0, C_a)$, où C_a (la capacité de l'arc a) est un nombre positif fini. Les dérivées première et seconde de D_a , notées respectivement D'_a et D''_a sont:

$$D'_a(f_a) = \frac{\partial D_a}{\partial f_a} = \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{(C_a - f_a)^2} + \sum_{p \in P} w_a^p \quad \text{si } a \in A_1, \quad (3.31)$$

$$D'_a(f_a) = \frac{\partial D_a}{\partial f_a} = \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{(C_a - f_a)^2} + \sum_{p \in P} \bar{w}_a^p \quad \text{si } a \in A_2, \text{ et} \quad (3.32)$$

$$D''_a(f_a) = \frac{\partial^2 D_a}{\partial^2 f_a} = \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{(C_a - f_a)^3} \quad \forall a \in A. \quad (3.33)$$

Les dérivées secondes sont strictement positives; ceci implique que la fonction D_a^a est une fonction strictement convexe. Donc le coût des usagers est convexe puisqu'il correspond à la somme de fonctions convexes. L'ensemble des contraintes définies par les équations (3.15) à (3.17) forme un polyèdre, noté $\Omega_f(w)$, convexe, borné et par hypothèse non vide. De ces remarques, nous pouvons conclure que le programme du second niveau est un programme strictement convexe. Donc une solution optimale existe pour le problème du suiveur. Vu que le programme est strictement convexe,

le flot optimal est unique. Mais il faut noter que c'est l'unicité du vecteur flot total qui est assurée car on peut trouver plusieurs combinaisons de plus courts chemins entre les paires, donnant le même vecteur de flot total. En conclusion, le problème de second niveau est très bien posé quel que soit w .

Comme par hypothèse, on a supposé qu'il existe toujours pour toute paire origine-destination OD, un chemin n'ayant aucun arc de A_1 (arc appartenant à la nouvelle compagnie), cela implique que la valeur optimale du problème biniveau est bornée supérieurement quoique l'ensemble réalisable du problème soit non compact. On a donc une solution au problème à deux niveaux. Tout comme dans Labbé, Marcotte et Savard (1998), on suppose que le meneur peut induire la solution qui lui est favorable parmi toutes les solutions équivalentes du second niveau (éventuellement à l'aide d'un incitatif).

3.3.3 Propriétés de la fonction au premier niveau

La fonction au premier niveau, revenu de la compagnie, est une fonction du prix et du vecteur flot que les usagers acheminent sur les liens. Maximiser le revenu revient à maximiser la fonction $R(w) = wf(w)$ où $f(w)$ est la fonction de demande des usagers en fonction du prix de routage w d'une unité de flot. En d'autres termes, $f(w)$ est la solution optimale du problème de second niveau en fonction du prix w . Les propriétés de $R(w)$ dépendent directement de celles de $f(w)$. Étant donné que la fonction $f(w)$ n'est pas connue explicitement, il est difficile de connaître ses propriétés qui définissent celles de $R(w)$. Mais la définition du revenu de la compagnie et l'aspect compétitif du problème permettent de conclure que la fonction revenu passe par au moins un maximum fini. En effet, si le prix fixé par la compagnie est nul, le revenu est nul et de même, si les prix sur tous les arcs de la nouvelle compagnie sont très élevés par rapport aux arcs qui ne lui appartiennent pas, les usagers acheminent toute leur demande sur les chemins formés par les arcs des autres compagnies et, le revenu de

la compagnie s'annule à nouveau. Le revenu, étant positif et ne pouvant pas être à l'infini, doit passer par un maximum fini.

3.4 Transformation du modèle

Sachant que la solution optimale du problème est bornée supérieurement et que l'ensemble des solutions optimales du second niveau est univoque, le modèle biniveau peut être remplacé par un modèle standard ayant un seul niveau. Dans cette section, nous écrivons le Lagrangien du problème de niveau inférieur, pour développer ensuite la condition du premier ordre de Lagrange et Kuhn-Tucker et enfin placer les équations des conditions d'optimalité comme contraintes du problème du premier niveau.

3.4.1 Conditions d'optimalité du premier ordre au second niveau

Soit L le Lagrangien du problème du second niveau:

$$L(f, w, \lambda, \mu, v) = \sum_{a \in A} \frac{\bar{\alpha}_a \sum_{p \in P} f_a^p}{\gamma(C_a - \sum_{p \in P} f_a^p)} + \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1} w_a^p f_a^p + \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_2} \bar{w}_a^p f_a^p \quad (3.34)$$

$$+ \sum_{p \in P} \sum_{i \in N} \lambda_i^p \left[\sum_{a \in i^+} f_a^p - \sum_{a \in i^-} f_a^p - d_i^p \right] - \sum_{p \in P} \sum_{a \in A} \mu_a^p f_a^p$$

où pour une paire p , $d_i^p = \tau_p$ si $i = O_p$, $d_i^p = -\tau_p$ si $i = D_p$ et $d_i^p = 0$ sinon. Noter que les μ_a^p sont les variables de Kuhn-Tucker associées aux variables f_a^p et que les λ_i^p sont les variables de Lagrange associées à chaque équation de conservation de flots pour une paire OD p au nœud i . La condition d'optimalité du premier ordre de la minimisation de ce Lagrangien $\nabla L(f, w, \lambda, \mu, v) = 0$ donne:

$$\frac{\partial L}{\partial f_a^p} = \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - w_a^p - \lambda_j^p + \lambda_i^p - \mu_a^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_a^p} = \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \bar{w}_a^p - \lambda_j^p + \lambda_i^p - \mu_a^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P, \quad (3.36)$$

$$\sum_{a \in i^+} f_a^p - \sum_{a \in i^-} f_a^p = \begin{cases} r_p & \text{si } i = O_p \\ -r_p & \text{si } i = D_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall i \in N \quad p \in P, \quad (3.37)$$

$$\mu_a^p f_a^p = 0 \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in A \quad (3.38)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} f_a^p \quad a \in A \quad (3.39)$$

$$f_a^p \geq 0, \quad \mu_a^p \geq 0; \quad \forall a \in A \quad p \in P \quad (3.40)$$

Le nouveau modèle est:

$$\max_{w, f, \lambda, \mu} R(w, f) = \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1} w_a^p f_a^p \quad (3.41)$$

s.à:

$$\frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + w_a^p - \lambda_j^p + \lambda_i^p - \mu_a^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (3.42)$$

$$\frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \bar{w}_a^p - \lambda_j^p + \lambda_i^p - \mu_a^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P, \quad (3.43)$$

$$\sum_{a \in i^+} f_a^p - \sum_{a \in i^-} f_a^p = \begin{cases} r_p & \text{si } i = O_p \\ -r_p & \text{si } i = D_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall i \in N \quad p \in P, \quad (3.44)$$

$$\mu_a^p f_a^p = 0 \quad \forall p \in P \quad \forall a \in A \quad (3.45)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} f_a^p \quad a \in A \quad (3.46)$$

$$f_a^p \geq 0, \quad \mu_a^p \geq 0; \quad \forall a \in A \quad p \in P. \quad (3.47)$$

Ce modèle est non linéaire et non convexe. Sa non linéarité est due à la bilinéarité de la fonction objectif par rapport aux variables w et f et aux contraintes 3.42 et 3.43. En particulier, les contraintes de complémentarité rendent le modèle non convexe.

3.5 Condition d'optimalité sur les prix

Sans perte de généralité, nous établissons la condition d'optimalité sur le prix du flot d'un arc de la compagnie en considérant un réseau ayant une seule paire de nœuds

offrant du trafic à m arcs. Le Lagrangien de ce modèle s'écrit:

$$L(f, w, \lambda, \mu) = \sum_{a \in M} \bar{\alpha}_a \frac{\sum_{p \in P} f_a^p}{\gamma(C_a - f_a)} + \sum_{a \in A_1} w_a f_a + \sum_{a \in A_2} \bar{w}_a f_a \quad (3.48)$$

$$+ \sum_{i \in N} \lambda_i \left[\sum_{a \in i^+} f_a - \sum_{a \in i^-} f_a - r_p \right] - \sum_{a \in A} \mu_a f_a$$

avec:

μ_a : les variables de Kuhn-Tucker et

λ_i : les multiplicateurs de Lagrange.

La condition d'optimalité du premier ordre de la minimisation de ce Lagrangien ($\nabla L(f, w, \lambda, \mu) = 0$) et les contraintes de Kuhn-Tucker donnent le système d'équations suivant:

$$\bar{\alpha}_a \frac{C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + w_a - \lambda_j + \lambda_i - \mu_a = 0, \quad \forall a \in A_1, \quad (3.49)$$

$$\bar{\alpha}_a \frac{C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \bar{w}_a - \lambda_j + \lambda_i - \mu_a = 0, \quad \forall a \in A_2, \quad (3.50)$$

$$\sum_{a \in j} f_a - \sum_{a \in i} f_a = \begin{cases} r & \text{si } i = O_p \\ -r & \text{si } i = D_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall i \in N, \quad (3.51)$$

$$\mu_a^p f_a = 0 \quad \forall a \in A, \quad (3.52)$$

$$f_a \geq 0, \quad \mu_a \geq 0; \quad \forall a \in A \quad (3.53)$$

Pour la paire p , sauf les nœuds origine et destination, chaque nœud i est la tête ou la queue d'un arc. Alors, en prenant les arcs qui définissent un chemin entre la paire p , l'ensemble des équations $\frac{\partial L}{\partial f_a} = 0$ est transformé en une famille de $|C_p|$ équations de la forme suivante:

$$\sum_{\{a \in A: a \in c\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{\{a \in A_1: a \in c\}} w_a + \sum_{\{a \in A_2: a \in c\}} \bar{w}_a + \lambda_O - \lambda_D - \sum_{\{a \in A: a \in c\}} \mu_a = 0, \quad (3.54)$$

$|C_p|$: le nombre de chemins entre la paire OD,

c : un chemin entre la paire OD.

Par hypothèse, il y a au moins un chemin qui ne contient aucun arc de la compagnie.

Notons c_t un chemin qui contient au moins un arc taxable et c_{nt} un chemin qui ne contient aucun arc taxable. Sur c_t et c_{nt} la relation (3.54) est:

$$\sum_{\{a \in A: |a \in c_t\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{\{a \in A_1: |a \in c_t\}} w_a + \sum_{\{a \in A_2: |a \in c_t\}} \bar{w}_a + \lambda_O - \lambda_D - \sum_{\{a \in A: |a \in c_t\}} \mu_a = 0, \quad \forall c_t \in C_p, \quad (3.55)$$

$$\sum_{\{a \in A: |a \in c_{nt}\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{\{a \in A_2: |a \in c_{nt}\}} \bar{w}_a + \lambda_O - \lambda_D - \sum_{\{a \in A: |a \in c_{nt}\}} \mu_a = 0, \quad \forall c_{nt}. \quad (3.56)$$

En faisant l'hypothèse que la compagnie possède un seul arc sur le chemin c_t , les équations (3.55) et (3.56) permettent de trouver une nouvelle équation de la forme:

$$w_a = \sum_{\{a \in A: |a \in c_{nt}\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{\{a \in A_2: |a \in c_{nt}\}} \bar{w}_a - \sum_{\{a \in A: |a \in c_{nt}\}} \mu_a - \sum_{\{a \in A: |a \in c_t\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \sum_{\{a \in A_2: |a \in c_t\}} \bar{w}_a + \sum_{\{a \in A: |a \in c_t\}} \mu_a. \quad (3.57)$$

Les variables μ_a sont des variables de Kuhn-Tucker qui vérifient les contraintes de complémentarité. A l'optimalité, si le flot sur l'arc est différent de zéro, elle est nulle; cela signifie que pour un arc a de la compagnie qui appartient à une chaîne c_t et qui a un flot non nul on a $\mu_a = 0$ donc w_a devient:

$$w_a = \sum_{\{a \in A: |a \in c_{nt}\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{\{a \in A_2: |a \in c_{nt}\}} \bar{w}_a - \sum_{\{a \in A: |a \in c_t\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{(C_a - f_a)^2} - \sum_{\{a \in A_2: |a \in c_t\}} \bar{w}_a - \sum_{\{a \in A: |a \in c_{nt}\}} \mu_a. \quad (3.58)$$

Les variables μ_a avec $a \in c_{nt}$ étant positives ou nulles alors:

$$w_a \leq \sum_{\{a \in A: |a \in c_{nt}\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{\{a \in A_2: |a \in c_{nt}\}} \bar{w}_a - \sum_{\{a \in A: |a \in c_t\}} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \sum_{\{a \in A_2: |a \in c_t\}} \bar{w}_a. \quad (3.59)$$

A l'optimalité, si le flot sur le chemin c_t est non nul ($\mu_a = 0$ pour $a \in c_t$), alors le prix w_a de l'arc de la compagnie sur un chemin doit être inférieur ou égal au coût d'opportunité de ne pas envoyer une unité de flot sur le chemin c_t .

Si on se place du côté des utilisateurs du réseau, le coût d'opportunité équivaut à l'économie réalisée si on n'utilise pas le chemin c_t . Mais du côté de la compagnie, le coût d'opportunité pourrait être considéré comme une perte réalisée car l'arc perd une unité de flots. Du point comparatif, d'un côté comme de l'autre, le coût d'opportunité s'apparente au prix de l'unité de flot sur cet arc. Et réciproquement, si l'unité de flot traverse l'arc de la compagnie, le coût d'opportunité peut être assimilé comme le gain généré par cette unité de flot à la compagnie, et aussi la dépense des usagers du réseau. Pour que la compagnie puisse espérer une plus grande utilisation de son arc, elle doit charger aux usagers un prix qui leur permettra de faire la plus petite dépense possible. Ainsi le prix pour une unité de flots doit être inférieur ou égal au coût d'opportunité d'envoyer le flot sur un autre chemin. Entre la paire OD , s'il y a plusieurs chemins possibles, le prix sur l'arc doit être aussi inférieur à tous les autres coûts d'opportunité; et ceci quelque soit l'autre chemin utilisé. Alors on peut établir une condition nécessaire d'optimalité pour le prix sur un arc de la compagnie. Cette condition stipule que le prix de l'unité de flot sur un arc de la compagnie doit être inférieur ou égal au plus petit coût d'opportunité d'utiliser tout autre chemin entre la paire OD .

$$w_a \leq \min\{\text{coût d'opportunité d'utiliser un autre chemin qui ne contient pas l'arc } a\}$$

Étant donné que la compagnie maximise son revenu, alors le prix qu'elle aura fixé pour un arc donné tend vers sa borne supérieure qui est le coût d'opportunité pour l'utilisateur de choisir un autre chemin pour envoyer une unité de flot de la paire p . Ainsi, à l'optimalité, pour un arc de la compagnie dont le flot pour une paire donnée est différent de zéro, le prix du flot pour cette paire est égal au plus au coût d'opportunité d'utiliser un autre qui ne contient pas cet arc.

3.6 Conclusion

Le programme mathématique à deux niveaux qui modélise le problème de tarification dans les réseaux de télécommunications a deux formulations: une formulation flot-arc et une formulation flot-chemin. Ce programme est un cas particulier de programme mathématique à deux niveaux car le programme au second niveau est paramétré par la variable de premier seulement dans l'objectif. Ceci rend certaines définitions relatives à la PDN triviales ou plus simples. Le programme au second niveau étant un programme strictement convexe, un flot optimal existe pour les usagers quand la compagnie fixe un prix w , et l'unicité du flot total sur les arcs est assurée. Quoique l'ensemble réalisable du problème soit non compact, la valeur optimale du problème biniveau est bornée supérieurement. L'existence et l'unicité de la solution optimale au second niveau permettent de transformer le programme à deux niveaux en un programme à un seul niveau en substituant le programme de second niveau par ses conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker. Ce programme d'un seul niveau constitue la base des deux approches de résolution développées au chapitre 4.

CHAPITRE 4

Méthodes de résolution

4.1 Introduction

Nous développons dans ce chapitre deux approches de résolution du problème de tarification optimale dans les réseaux de télécommunications (TOT) à commutation de paquets.

1. La première approche est une méthode itérative de décomposition de type Gauss-Seidel et itère entre deux sous-problèmes. Le premier sous-problème est le problème de routage qui, pour un prix fixé par la compagnie, détermine le flot optimal des usagers (suiveur). Le flot optimal de ce problème de routage engendre un nouveau sous-problème qui est un programme linéaire obtenu à partir du programme maître d'un seul niveau. Le programme linéaire détermine le prix qui est optimal pour le meneur quand le suiveur achemine cette valeur du flot. La résolution itérative de ces deux sous-problèmes permet de trouver une solution d'équilibre entre le suiveur et le meneur.
2. La deuxième approche est une méthode exacte qui résout une reformulation en nombres entiers du modèle. Cette reformulation se base principalement sur la transformation de la fonction objectif bilinéaire du modèle et sur l'approximation de la fonction de délai en une fonction linéaire par morceaux. L'élimination des contraintes de complémentarité et ces deux transformations engendrent un modèle linéaire en nombres entiers mixtes.

4.2 Approche par décomposition prix-flots

Cette approche de résolution est une méthode itérative de type Gauss-Seidel. Elle commence par la résolution du problème de routage des usagers défini par (3.14) soumis aux contraintes définies par (3.15) à (3.17), pour un prix w_0 donné de l'ensemble des prix de la compagnie. Le flot optimal $f_0 = f(w_0)$ des usagers permet de linéariser le programme d'un seul niveau défini par les équations (3.41) à (3.47) tel que montré à la section 3.4. La résolution du programme linéaire donne le prix optimal $w_1 = w(f_0)$ pour le meneur quand les usagers acheminent f_0 , et les variables de Kuhn-Tucker des conditions d'optimalité du second niveau. Si $w_1 = w_0 \Rightarrow f(w_0) = f(w_1)$, alors le point (w_0, f_0) est un point d'équilibre entre le meneur et le suiveur car le prix w_0 maximise le revenu de la compagnie quand les suiveurs acheminent f_0 , et f_0 minimise les dépenses des usagers quand la compagnie impose le prix à w_0 . Si tel n'est pas le cas, on résout le problème de routage qui est associé au prix w_1 . Cette procédure itérative continue jusqu'à ce qu'en une itération i on obtienne $w_i \Rightarrow f_i$, $f_i \Rightarrow w_{i+1}$ et $w_i = w_{i+1}$. Cela signifie que le point (w_i, f_i) est un point d'équilibre. Cette approche de résolution peut être résumée dans le schéma de la figure 4.1.

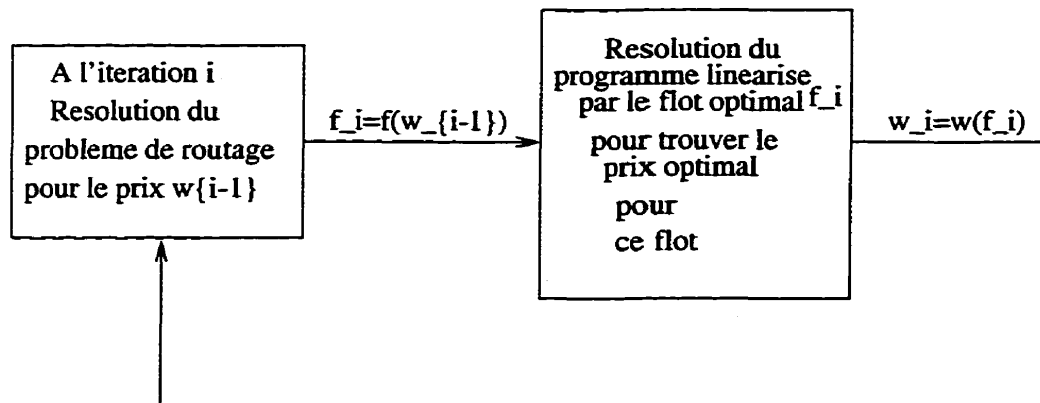


Figure 4.1 – Étapes de l'approche par décomposition Prix-Flots pour l'itération i

Donc, une solution d'équilibre du problème de tarification peut être trouvée par cette procédure itérative dont chaque itération se divise en deux étapes. La première étape résout pour un vecteur prix connu le problème d'acheminement du second niveau et la deuxième étape trouve la solution du programme ayant un seul niveau linéarisé en substituant la variable flot par la valeur du flot optimal du problème d'acheminement.

4.2.1 Détermination du flot optimal

Quand le prix de la compagnie est connu, le problème au second niveau est un problème d'acheminement optimal. Ce problème minimise les dépenses des usagers en respectant les contraintes de multiflot. Ce programme appartient à la catégorie des modèles de réseaux à coût non linéaire. En télécommunications, la méthode la plus utilisée pour résoudre ce genre de problèmes est la méthode de détournement de flots qui est un cas particulier de la méthode de Frank-Wolfe.

La Méthode de Frank-Wolfe

La méthode de Frank-Wolfe a été initialement développée pour résoudre un problème de programmation quadratique, mais a été très vite généralisée à la minimisation d'une fonction convexe différentiable soumis à des contraintes linéaires. Dans le cas général, cette méthode peut ne pas être aussi efficace que certaines méthodes récentes, mais pour certaines structures de problème, elle peut être numériquement compétitive. Considérons le problème:

$$P : \quad \min_x f(x) \quad (4.1)$$

s.à

$$Ax \leq b \quad (4.2)$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad (4.3)$$

où f est une fonction convexe et différentiable et l'ensemble des solutions réalisables défini par $\{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b\}$ est un ensemble borné et non vide.

En supposant qu'un point réalisable x^k de l'ensemble réalisable a été généré, la $k^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme de Frank-Wolfe est constituée de deux étapes. A la première étape, on résout un programme linéaire P^l obtenu de P par la linéarisation de f autour de x^k . Ce programme linéaire s'écrit ainsi:

$$P^l : \quad \min_y [\nabla f(x^k)]^t y \quad (4.4)$$

s.à:

$$Ay \leq b \quad (4.5)$$

$$y \in \mathbf{R}^n \quad (4.6)$$

La solution optimale de P^l qui, par hypothèse, est finie, est notée y^k . À la seconde étape, le meilleur point sur le segment entre x^k et y^k est choisi pour la prochaine itération. La région réalisable de P étant convexe et les points x^k et y^k appartenant à la région réalisable, alors n'importe quel point sur le segment de droite $[x^k, y^k]$ est aussi un point réalisable. Nous déterminons le meilleur point sur le segment en faisant la recherche linéaire suivante:

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} f(\lambda x^k + (1 - \lambda)y^k) \quad (4.7)$$

où λ^k est une solution optimale de cette recherche linéaire. Le point résultant est alors défini par $x^{k+1} = \lambda^k x^k + (1 - \lambda^k)y^k$. On teste alors l'optimalité de x^{k+1} selon un critère de convergence défini; s'il n'est pas optimal on procède à la prochaine itération. Cette procédure continue jusqu'à ce que le critère de convergence soit vérifié.

La méthode de déviation de flots

La méthode de déviation de flots est la méthode de Frank-Wolfe appliquée au problème d'acheminement de flots dans les réseaux de télécommunications. Fratta,

Gerla et Kleinrock (1973) présentent la méthode de déviation de flots à l'aide d'un opérateur (noté DF) qui permet de transformer un multiflot f en un autre multiflot f' . L'opérateur est défini comme suit:

$$DF(v, \lambda) \odot f = (1 - \lambda)f + \lambda v = f'$$

où v est un multiflot proprement choisi et λ est un scalaire appartenant à $[0, 1]$. Alors $DF(v, \lambda)$ est une application de F (F ensemble de flots réalisables) dans lui-même. Alors pour un flot $f \in F$ on peut déterminer une paire (v, λ) de façon à ce que l'application répétée de $DF(v, \lambda)$ (à partir du flot initial f) produise une séquence $\{f^n\}$ qui converge en un flot stationnaire. Si nous pouvons définir la paire (v, λ) alors nous avons un algorithme pour le calcul du flot stationnaire.

Quand la fonction objectif du problème d'acheminement est séparable par arc, la méthode de déviation de flots produit des sous-problèmes très simples à résoudre en exploitant certaines propriétés de la théorie des graphes et des réseaux. Dans ce cas, les programmes linéaires de la première étape de la méthode de Frank-Wolfe sont des problèmes de plus courts chemins dans des réseaux de multicommodité de flots standards. Le coût sur un arc pour le calcul des plus courts chemins est la dérivée de la fonction objectif (les coûts des usagers) par rapport au flot d'une paire sur cet arc. Le vecteur flot des plus courts chemins est la solution du programme linéaire, et on le note v .

Comme pour la méthode de Frank-Wolfe, une itération k de la méthode de déviation de flots se divise en deux étapes. La première étape détermine, à partir d'un flot f^k réalisable, la solution du programme linéaire, notée v^k , qui est le flot des plus courts chemins. Le coût sur les arcs pour le calcul de v^k est la dérivée de la fonction objectif par rapport au flot de la commodité sur cet arc en f^k . La deuxième étape détermine le flot f^{k+1} qui, s'il n'est pas optimal, est le flot de la prochaine itération. Le flot f^{k+1} qui est la meilleure combinaison convexe entre f^k et v^k est un flot réalisable. Car l'ensemble des flots réalisables F d'un problème de multicommodité de flots est un

ensemble convexe et les flots f^k et v^k y appartiennent. La valeur de f^{k+1} est déterminée par $f^{k+1} = \lambda^k f^k + (1 - \lambda^k) v^k$ où $\lambda^k \in [0, 1]$ et $\lambda^k = \operatorname{argmin}_{\lambda} D(\lambda f^k + (1 - \lambda) v^k)$. Si le flot f^{k+1} satisfait le critère de convergence fixé, alors il est optimal, sinon, on passe à l'itération $k + 1$ en suivant la même procédure.

Donc, dans la méthode de déviation de flots, le vecteur de flots des plus courts chemins donne une direction de descente réalisable et la valeur de λ est le pas dans cette direction de descente. Ce pas est défini comme un changement incrémental le long de la direction réalisable et est synonyme d'une déviation de flots des chaînes les plus longues vers les chaînes les plus courtes. C'est pour cela que dans la littérature des télécommunications la méthode Frank-Wolfe est communément appelée *détournement de flots*.

L'algorithme de déviation de flots peut être décrit ainsi:

Étape 1:

- 1.- initialisation, soit $n=0$;
- 2.- trouver un flot initial de départ f^0 ,
- 3.- calcul de v^0 , flot de plus court chemin pour les coûts définis par f^0 .

Étape 2:

Calcul du flot de la $(n + 1)$ ^{ième} selon les étapes;

- 1.- calcul de v^n , flot de plus court chemin pour les coûts définis par f^n ,
- 2.- calcul du pas optimal $\lambda^n = \operatorname{argmin}_{\lambda} D(\lambda f^n + (1 - \lambda) v^n)$,
- 3.- enfin $f^{(n+1)} = DF(v^n, \lambda^n) \odot f^n = \lambda^n f^n + (1 - \lambda^n) v^n$,

Étape 3:

test: Si $\{P(f^n) - P(f^{(n+1)})\} < \epsilon$, on arrête; sinon on retourne au niveau 1

de l'étape 2 pour $n := n + 1$; où ϵ est une tolérance positive acceptable et P est la fonction objectif du problème d'acheminement.

L'application de cet algorithme au second niveau du problème de tarification pour un prix fixé donne un flot f_a optimal pour chaque arc a . Dans l'implantation de cet algorithme, les plus courts chemins entre les paires sont calculés avec les coûts sur un arc a pour une paire p :

$$c_a^p = \frac{\partial D}{\partial f_a^p} = \begin{cases} \frac{\alpha_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + w_a^p & \text{si } a \in A_1 \\ \frac{\alpha_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \bar{w}_a^p & \text{si } a \in A_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Le flot initial est le flot nul. Il donne un coût initial $(\alpha_a/C_a) + w_a^p$ pour les arcs de la compagnie et $(\alpha_a/C_a) + \bar{w}_a^p$ pour les arcs des autres compagnies.

Puisque le problème de routage est convexe, l'algorithme de déviations de flots converge vers un flot réalisable et optimal de ce dernier problème. Ce vecteur flot optimal pour le suiveur permet de déterminer un vecteur prix qui maximise le revenu de la compagnie en utilisant le programme d'un seul niveau.

4.2.2 Détermination du prix optimal

Les deux grandes difficultés qui rendent difficile la résolution du programme d'un seul niveau sont la présence des termes non linéaires liés au délai et les contraintes de complémentarité. La connaissance d'un flot optimal pour le suiveur permet d'éliminer les termes du délai et les équations de complémentarité. Ainsi, le programme d'un seul niveau devient un programme linéaire qui détermine le prix qui optimise le revenu du meneur pour cette valeur du flot.

La connaissance d'un vecteur flot optimal au second niveau permet de diviser chaque ensemble d'arcs en deux sous-ensembles: un des sous-ensembles a des arcs de flots non nuls fixes, l'autre a des arcs de flots nuls. Par exemple, A_1 est égal à $A'_1 \cup A''_1$ avec A'_1 l'ensemble des arcs de la compagnie qui ont un flot non nul pour une paire

donnée et A_1'' est l'ensemble des arcs de la compagnie qui ont un flot nul. De même, on a $A_2 = A_2' \cup A_2''$, et $A = A' \cup A''$ avec A' les arcs dont le flot total est non nul, A'' ceux dont le flot total est nul. Ces hypothèses permettent, à partir des équations de complémentarité, de trouver $\mu_a^p = 0$ pour tous les f_a^p différents de zéro. De plus, la substitution de f par sa valeur transforme l'expression $\alpha_a C_a / (C_a - f_a)^2$ en une constante. En prenant ces données en considération, le modèle ayant un seul niveau des équations (3.41) à (3.47) s'écrit pour un vecteur f donné, comme:

$$\max_{w, \lambda, \mu} R^f(w) = \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1'} w_a^p f_a^p \quad (4.9)$$

s.à:

$$\frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + w_a^p - \lambda_j^p + \lambda_i^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_1' \times P, \quad (4.10)$$

$$\frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + w_a^p - \lambda_j^p + \lambda_i^p - \mu_a^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_1'' \times P, \quad (4.11)$$

$$\frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \bar{w}_a^p - \lambda_j^p + \lambda_i^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_2' \times P, \quad (4.12)$$

$$\frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \bar{w}_a^p - \lambda_j^p + \lambda_i^p - \mu_a^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_2'' \times P, \quad (4.13)$$

$$w_a^p \geq 0, \quad \forall a \in A_1 \quad p \in P, \quad (4.14)$$

$$\mu_a^p \geq 0, \quad \forall a \in A''. \quad (4.15)$$

avec $f_a^p, f_a \quad \forall p, a$ connus. La résolution de ce programme linéaire donne le prix qui est optimal pour la compagnie étant donné le flot optimal considéré. Ainsi à chaque flot optimal trouvé par l'algorithme de déviation de flots, on peut déterminer le prix optimal pour la compagnie.

Ainsi la procédure itérative de type Gauss-Seidel qui résout le problème de tarification optimale dans les réseaux de télécommunications peut être représentée comme suit:

1. Première itération ou initialisation

– Étape 1: Soit w_0 un prix de l'ensemble des prix réalisables; résoudre le

problème de routage et soit $f_0 = f(w_0)$ la solution optimale.

- Étape 2: Résoudre le programme linéaire; et soit w_1 la solution. Si $w_1 = w_0 \Rightarrow f_0$ est un optimum pour le suiveur pour le prix w_0 et de même w_0 est optimal pour la compagnie, le point $(f_0, w_0 = w_1)$ est un point d'équilibre du problème TOT.

2. à l'itération i on a:

- Étape 1: À l'aide de w_i de l'itération $(i - 1)$, résoudre le problème de routage et soit f_i la solution optimale.
- Étape 2: Pour la valeur de f_i résoudre le programme linéaire et soit w_{i+1} la solution optimale. Si $w_i = w_{(i+1)}$ alors on est en un point d'équilibre. Si non on passe à l'itération suivante.

Il faut souligner que le prix de l'itération i est trouvé au cours de l'itération $i - 1$.

En pratique, cette procédure itérative de type Gauss-Seidel converge en une valeur optimale d'une solution d'équilibre du problème. À cause de la dégénérescence, la solution d'équilibre peut ne pas être unique, c'est-à-dire on peut trouver deux points d'équilibre qui donnent la même valeur optimale. la valeur de l'objectif. Donc, sous l'hypothèse de la non dégénérescence du problème, l'obtention du point de convergence est assurée, car, pour un prix w fixé par la compagnie le problème du suiveur a toujours un flot optimal noté $f(w)$. De plus le programme linéaire obtenu par la substitution du flot f par la valeur de $f(w)$ aura toujours un prix optimal qui est au moins le prix w qui a engendré le flot $f(w)$. Donc pour tout prix initial, l'approche DPF converge en un point d'équilibre entre le nouveau fournisseur de service et les usagers qui, à cause de la dégénérescence, peut ne pas être unique. Ce point reste un point d'équilibre dont on ne peut pas dire s'il est un optimal local ou global. Cependant nous sommes assurés qu'en ce point d'équilibre, les conditions d'optimalité du

premier ordre pour le problème du suiveur sont vérifiées. Car pour un point d'équilibre (w^e, f^e) , et à la limite du critère de convergence pour le problème du second niveau, le flot f^e est la solution optimale du problème de suiveur résolu pour $w = w^e$.

4.3 Approche par linéarisation et nombres entiers

Dans cette section, nous présentons une approche exacte basée sur la programmation en nombres entiers. Un programme linéaire en nombres entiers sera résolu suite à des transformations qui,

1. substituent à la fonction objectif bilinéaire du programme d'un seul niveau une fonction équivalente;
2. linéarisent les contraintes de complémentarité en utilisant des variables binaires;
3. et enfin, approximent la fonction de délai par une fonction linéaire par morceaux.

Toutes ces transformations seront faites à partir du programme d'un seul niveau. Rappelons le programme d'un seul niveau.

$$\max_{w, f, \lambda, \mu} R(w, f) = \sum_{p \in P} \sum_{a \in A_1} w_a^p f_a^p \quad (4.16)$$

s.à:

$$w_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p - \mu_a^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (4.17)$$

$$\bar{w}_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p - \mu_a^p = 0, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P, \quad (4.18)$$

$$\sum_{a \in i^+} f_a^p - \sum_{a \in i^-} f_a^p = \begin{cases} r_p & \text{si } i = O_p \\ -r_p & \text{si } i = D_p \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}, \quad \forall (k, p) \in N \times P, \quad (4.19)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} f_a^p, \quad \forall a \in A \quad (4.20)$$

$$\mu_a^p f_a^p = 0, \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in A \quad (4.21)$$

$$f_a^p \geq 0, \quad w_a^p \geq 0; \quad \mu_a^p \geq 0, \quad \forall a \in A, \quad \forall p \in P. \quad (4.22)$$

4.3.1 Reformulation de l'objectif du programme d'un seul niveau

Pour faciliter l'écriture de cette section, on définit les sous-ensembles suivants:

$$A_{1,i}^+ = \{a \in A_1 | a \in i^+\},$$

$$A_{1,i}^- = \{a \in A_1 | a \in i^-\},$$

$$A_{2,i}^+ = \{a \in A_2 | a \in i^+\},$$

$$A_{2,i}^- = \{a \in A_2 | a \in i^-\}.$$

où i est un nœud de N . On introduit les notations a^+ et a^- qui signifient $a^+ = j$ et $a^- = i$ si $a = (i, j)$.

À partir des équations (4.17) et (4.18), les variables μ_a^p s'écrivent:

$$\mu_a^p = w_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_{a^+}^p + \lambda_{a^-}^p, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P \quad (4.23)$$

$$\mu_a^p = \bar{w}_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_{a^+}^p + \lambda_{a^-}^p, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P. \quad (4.24)$$

Donc, les conditions de complémentarité sont équivalentes à:

$$w_a^p f_a^p + f_a^p \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + f_a^p (-\lambda_{a^+}^p + \lambda_{a^-}^p) = 0, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P \quad (4.25)$$

$$\bar{w}_a^p f_a^p + f_a^p \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + f_a^p (-\lambda_{a^+}^p + \lambda_{a^-}^p) = 0, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P. \quad (4.26)$$

Dans l'équation (4.25), et pour chaque $(a, p) \in A_1 \times P$, on a:

$$w_a^p f_a^p = -\frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + f_a^p (\lambda_{a^+}^p - \lambda_{a^-}^p), \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P. \quad (4.27)$$

La substitution de $w_a^p f_a^p$ dans l'objectif donne:

$$R(w, f) = \sum_{a \in A_1} \sum_{p \in P} w_a^p f_a^p = - \sum_{a \in A_1} \sum_{p \in P} \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{a \in A_1} \sum_{p \in P} f_a^p (\lambda_{a^+}^p - \lambda_{a^-}^p)$$

L'équation précédente permet d'écrire:

$$R(w, f) = - \sum_{a \in A_1} \sum_{p \in P} \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p \left(\sum_{a \in A_{1,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{1,i}^-} f_a^p \right)$$

A partir de (4.26), pour chaque $(a, p) \in A_2 \times P$ on a:

$$f_a^p(\lambda_{a+}^p - \lambda_{a-}^p) = \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \bar{w}_a^p f_a^p, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P. \quad (4.28)$$

En sommant sur a et p , l'équation précédente devient:

$$\sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} f_a^p(\lambda_{a+}^p - \lambda_{a-}^p) = \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \bar{w}_a^p f_a^p \quad (4.29)$$

où on écrit:

$$\sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p \left(\sum_{a \in A_{2,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{2,i}^-} f_a^p \right) = \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} + \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \bar{w}_a^p f_a^p. \quad (4.30)$$

La décomposition des équations de conservation de flots s'écrit:

$$\forall p \in P, \forall i \in N \quad \sum_{a \in A_{1,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{1,i}^-} f_a^p + \sum_{a \in A_{2,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{2,i}^-} f_a^p = d_i^p \quad (4.31)$$

où pour une paire p , $d_i^p = r^p$ si $i = O_p$, $d_i^p = -r^p$ si $i = D_p$ et $d_i^p = 0$ sinon.

En sommant sur P et N , on a:

$$\sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p \left(\sum_{a \in A_{1,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{1,i}^-} f_a^p \right) + \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p \left(\sum_{a \in A_{2,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{2,i}^-} f_a^p \right) = \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p d_i^p \quad (4.32)$$

Alors, on a:

$$\sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p \left(\sum_{a \in A_{1,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{1,i}^-} f_a^p \right) = \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p d_i^p - \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p \left(\sum_{a \in A_{2,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{2,i}^-} f_a^p \right) \quad (4.33)$$

En remplaçant $\sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p (\sum_{a \in A_{2,i}^+} f_a^p - \sum_{a \in A_{2,i}^-} f_a^p)$ par sa valeur trouvée dans (4.30), le revenu de la compagnie devient:

$$R(w, f) = \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p d_i^p - \sum_{a \in A_1} \sum_{p \in P} \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \bar{w}_a^p f_a^p \quad (4.34)$$

Comme $\bar{\alpha}_a$ et C_a sont indépendants de p , alors:

$$\sum_{a \in A_i} \sum_{p \in P} \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} = \sum_{a \in A_i} \bar{\alpha}_a C_a \frac{\sum_{p \in P} f_a^p}{\gamma(C_a - f_a)^2} \quad (i = 1, 2) \quad (4.35)$$

et $f_a = \sum_{p \in P} f_a^p$,

$$\Rightarrow \sum_{a \in A_i} \sum_{p \in P} \frac{f_a^p \bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} = \sum_{a \in A_i} \frac{\bar{\alpha}_a C_a f_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} \quad (i = 1, 2) \quad (4.36)$$

La nouvelle fonction objectif est:

$$\sum_{a \in A_1} \sum_{p \in P} w_a^p f_a^p = \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p d_i^p - \sum_{a \in A_1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a f_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \sum_{a \in A_2} \frac{\bar{\alpha}_a C_a f_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \bar{w}_a^p f_a^p \quad (4.37)$$

4.3.2 Transformation des contraintes de complémentarité

L'élimination des contraintes de complémentarité nous permettra d'avoir un modèle en nombres entiers mixtes non linéaire. Chaque contrainte de complémentarité sera remplacée par deux inéquations liées par une variable binaire. Ainsi, une équation de complémentarité est remplacée par:

$$w_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p \leq M z_a^p, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (4.38)$$

$$f_a^p \leq M(1 - z_a^p), \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (4.39)$$

$$\bar{w}_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p \leq M z_a^p, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P, \quad (4.40)$$

$$f_a^p \leq M(1 - z_a^p), \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P. \quad (4.41)$$

où M est une constante de valeur appropriée et z_a^p est une variable binaire. Cette variable binaire capte les écarts complémentaires. Par exemple, si z_a^p vaut zéro, on a:

$$f_a^p \geq 0, \quad (4.42)$$

$$\bar{w}_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p = 0; \quad (4.43)$$

et si elle vaut 1, on a:

$$f_a^p = 0, \quad (4.44)$$

$$\bar{w}_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p \geq 0. \quad (4.45)$$

Donc, on a un modèle non linéaire en nombres entiers mixtes qui est:

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p d_i^p - \sum_{a \in A_1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a f_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \sum_{a \in A_2} \frac{\bar{\alpha}_a C_a f_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \bar{w}_a^p f_a^p; \quad (4.46)$$

s.à;

$$\lambda_j^p - \lambda_i^p - w_a^p \leq \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2}, \quad \forall (p, a) \in P \times N \times A_1, \quad (4.47)$$

$$\lambda_j^p - \lambda_i^p \leq \bar{w}_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2}, \quad \forall (p, a) \in P \times N \times A_2, \quad (4.48)$$

$$\sum_{a \in i^+} f_a^p - \sum_{a \in i^-} f_a^p = \begin{cases} r_p & \text{si } i = O_p \\ -r_p & \text{si } i = D_p \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}, \quad \forall i \in N \quad p \in P, \quad (4.49)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} f_a^p, \quad \forall a \in A, \quad (4.50)$$

$$w_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p \leq M z_a^p, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (4.51)$$

$$f_a^p \leq M(1 - z_a^p), \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (4.52)$$

$$\bar{w}_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p \leq M z_a^p, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P, \quad (4.53)$$

$$f_a^p \leq M(1 - z_a^p), \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P, \quad (4.54)$$

$$f_a^p \geq 0, \quad (a, p) \in A \times P \quad z_a^p \in \{0, 1\}, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (4.55)$$

$$z_a^p \in \{0, 1\}, \quad (a, p) \in A_2 \times P. \quad (4.56)$$

Les expressions non linéaires rendent le modèle difficile à résoudre pour les algorithmes classiques de programmation en nombres entiers linéaires. Pour pallier ce problème, on fait une approximation linéaire de ces expressions de forme fonctionnelle connue. La solution optimale du modèle trouvée par approximation des expressions non linéaires (un modèle MIP) est une valeur approximative de la solution de notre problème de tarification dans les réseaux de télécommunications. Si, sur les intervalles considérés, les fonctions linéaires sont des cordes des courbes non linéaires, la solution optimale est une borne inférieure, mais si les fonctions linéaires sont les tangentes aux courbes, la solution est une borne supérieure. Le modèle que nous écrivons maintenant est construit en faisant une approximation des fonctions suivant des cordes,

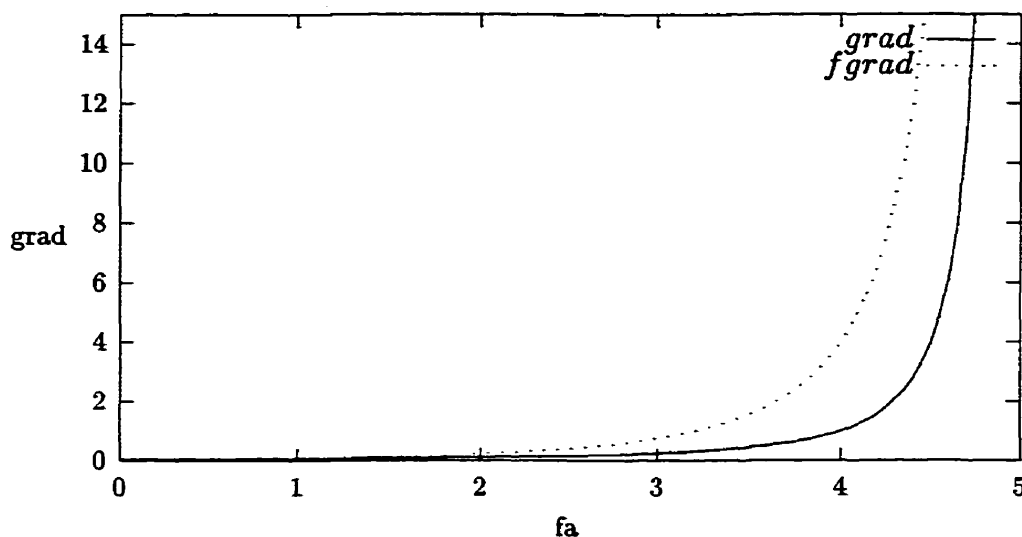


Figure 4.2 – Courbes du gradient et du produit du flot par le gradient pour $C=5$

c'est-à-dire on considère directement la portion de droite définie par les extrémités d'un intervalle considéré.

4.3.3 Linéarisation de la fonction de délai

Comme le problème est séparable par arc, on fait l'approximation pour les expressions d'un arc. Pour tout arc a , ces expressions sont $\frac{1}{(C_a - f_a)^2}$ et $\frac{f_a}{(C_a - f_a)^2}$ que nous notons respectivement $g(f_a)$ et $h(f_a)$. Elles sont toutes deux de forme hyperbolique (figure 4.2). Elles sont définies, continues et dérivables sur l'intervalle de définition $[0, C_a)$ où $f_a = C_a$ est une asymptote verticale pour les deux fonctions. La branche hyperbolique des deux courbes sur l'intervalle $[0, C_a)$ peut être approximée par une fonction linéaire par morceaux en subdivisant leur intervalle de définition $[0, C_a)$ en n sous-intervalles. Les n sous-intervalles engendrent $n+1$ extrémités réelles connues que nous notons b_{ak} , où a définit la variable de flot d'un arc et k l'indice de l'extrémité de l'intervalle. La première extrémité est $b_{a1} = 0$ et la dernière est $b_{a(n+1)} = C_a - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ mais petit. L'approximation de la fonction de délai par une fonction linéaire par

morceaux (voir Nemhauser et Wolsey (1988)) permet d'avoir un modèle linéaire en nombres entiers. La solution de ce modèle en nombre entiers est la solution approximative du problème de tarification optimale dans les réseaux de télécommunications. Il faut noter que, plus n est grand, plus la solution du modèle en nombres entiers s'approche de la valeur du revenu du meneur.

A chaque valeur de b_{ak} on considère les couples $(b_{ak}, g(b_{ak}))$ et $(b_{ak}, h(b_{ak}))$ pour $k = 1, \dots, n+1$ et chaque $a \in A$. Alors, tout $f_a \in [b_{a1}, b_{a(n+1)}]$ peut être écrit comme une combinaison linéaire convexe des b_{ak} , c'est-à-dire:

$$f_a = \sum_{k=1}^{n+1} t_{ak} b_{ak} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n+1} t_{ak} = 1 \quad t_{ak} \in \mathbf{R}^+. \quad (4.57)$$

Les t_{ak} ne sont pas uniques, mais si $f_a \in [b_{ak}, b_{a(k+1)}]$ et t_{ak} est choisi tel que $f_a = t_{ak} b_{ak} + t_{a(k+1)} b_{a(k+1)}$, alors on obtient:

$$g(f_a) = \sum_{k=1}^{n+1} t_{ak} g(b_{ak}); \quad (4.58)$$

$$h(f_a) = \sum_{k=1}^{n+1} t_{ak} h(b_{ak}). \quad (4.59)$$

Si au plus deux t_{ak} sont positifs, et t_{al} et t_{ao} sont positifs, alors $l = o - 1$ ou $l = o + 1$. Ces conditions peuvent être modélisées en utilisant des variables binaires notées x_{ak} pour $k = 1, \dots, n$, où $x_{ak} = 1$ si $f_a \in [b_{ak}, b_{a(k+1)}]$ et $x_{ak} = 0$ sinon. Ces conditions sont traduites par les contraintes suivantes:

$$t_{a1} \leq x_{a1}, \quad (4.60)$$

$$t_{a2} \leq x_{a1} + x_{a2}, \quad (4.61)$$

$$t_{a3} \leq x_{a2} + x_{a3}, \quad (4.62)$$

$$\dots, \quad (4.63)$$

$$\dots, \quad (4.64)$$

$$\dots, \quad (4.65)$$

$$t_{a(n+1)} \leq x_{an}, \quad (4.66)$$

$$\sum_{k=1}^n x_{ak} = 1. \quad (4.67)$$

En utilisant les approximations des fonctions $h(f_a)$ et $g(f_a)$ et les contraintes supplémentaires qui en découlent, on écrit un modèle MIP qui ne prendra pas en considération les équations de complémentarité pour les arcs de A_1 . Dans ce cas, on considère les prix w_a^p comme des variables libres qui s'ajustent pour maximiser le revenu de la compagnie. Dans ce modèle, le flot de chaque paire a un prix sur les arcs. Ainsi les contraintes pour les $(a, p) \in A_1 \times P$ peuvent être négligées car à l'optimalité, si le flot d'une paire p sur un arc a est différent de zéro, le prix w_a^p s'ajuste pour vérifier l'équation: $w_a^p = \lambda_j^p - \lambda_i^p - \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{(C_a - f_a)^2}$. Alors la connaissance des flots sur le réseau et des variables duales λ_k^p permet de déduire les prix w_a^p . Les variables de flot et les variables duales sont déterminées par le modèle suivant:

$$\max_{f, t, x, z} \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_i^p d_i^p - \sum_{a \in A_1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma} t_{ak} h(b_{ak}) - \sum_{a \in A_2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma} t_{ak} h(b_{ak}) - \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \bar{w}_a^p f_a^p \quad (4.68)$$

s.à;

$$\lambda_j^p - \lambda_i^p - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma} t_{ak} g(b_{ak}) \leq \bar{w}_a^p, \quad \forall (p, a) \in P \times N \times A_2, \quad (4.69)$$

$$f_a = \sum_{k=1}^{n+1} t_{ak} b_{ak}, \quad \forall a \in A, \quad (4.70)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} t_{ak} = 1, \quad \forall a \in A, \quad (4.71)$$

$$t_{a1} \leq x_{a1}, \quad \forall a \in A, \quad (4.72)$$

$$t_{ak} \leq x_{a(k-1)} + x_{ak}, \quad k = 2, \dots, n, \quad \forall a \in A, \quad (4.73)$$

$$t_{a(n+1)} \leq x_{an}, \quad \forall a \in A, \quad (4.74)$$

$$\sum_{k=1}^n x_{ak} = 1, \quad \forall a \in A, \quad (4.75)$$

$$\sum_{a \in i^+} f_a^p - \sum_{a \in i^-} f_a^p = \begin{cases} r_p & \text{si } i = O_p \\ -r_p & \text{si } i = D_p \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}, \quad \forall i \in N \quad p \in P, \quad (4.76)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} f_a^p, \quad \forall a \in A, \quad (4.77)$$

$$\bar{w}_a^p + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma} t_{ak} g(b_{ak}) - \lambda_j^p + \lambda_i^p - M z_a^p \leq 0, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P, \quad (4.78)$$

$$f_a^p \leq M(1 - z_a^p), \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P, \quad (4.79)$$

$$f_a^p \geq 0, \quad \forall (a, p) \in A \times P, \quad (4.80)$$

$$x_{ak} \in \{0, 1\}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \forall a \in A, \quad (4.81)$$

$$t_{ak} \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n, n+1\} \quad \forall a \in A, \quad (4.82)$$

$$z_a^p \in \{0, 1\}, \quad \forall (a, p) \in A_2 \times P. \quad (4.83)$$

Tel que formulé, le modèle ci-dessus permet de trouver pour chaque arc un prix pour chaque commodité. Il s'ensuit que, pour un arc donné, les différents flots qui le traversent peuvent avoir des prix différents. Nous allons donc appeler ce modèle: modèle en nombres entiers à prix différents (NEPD).

4.3.4 Modèle MIP2: prix uniforme sur les arcs

En considérant les contraintes de complémentarité définies pour les arcs taxables ($a \in A_1$) et en ajoutant de nouvelles contraintes qui imposent l'égalité des prix pour toutes les paires sur un arc donné on obtient un nouveau modèle en nombre entiers qui détermine un prix unique sur un arc. Ce modèle intitulé modèle en nombres entiers à prix identiques (NEPI) suscite un certain intérêt, car, vu l'augmentation du nombre de variables et du nombre de contraintes par rapport au modèle NEPD, il est plus difficile à résoudre, et de plus il ne fait aucune discrimination sur les prix selon la paire origine-destination. Alors le modèle NEPI se formule comme suit:

$$\max_{w, f, t, x, z} \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} \lambda_k^p d_k^p - \sum_{a \in A_1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma} t_{ak} h(b_{ak}) - \sum_{a \in A_2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma} t_{ak} h(b_{ak}) - \sum_{a \in A_2} \sum_{p \in P} \bar{w}_a^p f_a^p \quad (4.84)$$

s.à;

$$4.69 \text{ à } 4.83 \quad (4.85)$$

$$\lambda_j^p - \lambda_i^p - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma} t_{ak} g(b_{ak}) - w_a^p \leq 0, \quad \forall (p, a) \in P \times A_1, \quad (4.86)$$

$$w_a^p = w_a^{p'}, \quad \forall a \in A_1 \quad \forall p \in P \quad \forall p' \in P, \quad (p \neq p') \quad (4.87)$$

$$w_a^p + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma} t_{ak} g(b_{ak}) - \lambda_j^p + \lambda_i^p \leq M z_a^p, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (4.88)$$

$$f_a^p \leq M(1 - z_a^p), \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P, \quad (4.89)$$

$$z_a^p \in \{0, 1\}, \quad \forall (a, p) \in A_1 \times P. \quad (4.90)$$

4.4 Conclusion

Le problème TOT tel que posé au chapitre 3 est résolu suivant deux approches. La première est une méthode de décomposition de type Gauss-Seidel qui permet de trouver itérativement un point d'équilibre (entre la compagnie et les usagers) qui est au moins un optimum local du problème. Cette approche trouve un vecteur prix optimal pour la compagnie dont chaque composante est positive et correspond au prix d'une commodité sur un arc. La deuxième approche est une méthode exacte qui résout deux modèles en nombres entiers. Un modèle appelé modèle en nombres entiers à prix différents (NEPD) détermine le flot et le prix qui optimisent le revenu de la compagnie et les coûts des usagers. Le prix optimal de ce modèle est un vecteur dont chaque composante peut être négative ou positive et est le prix du flot d'une paire sur un arc. Le deuxième modèle est le premier modèle auquel on ajoute de nouvelles contraintes. Ces nouvelles contraintes permettent de trouver un vecteur prix dont chaque composante correspond à une variable libre et est le prix de n'importe quelle commodité sur un arc. Ce modèle est appelé modèle en nombre entier à prix identiques (NEPI).

CHAPITRE 5

Analyse des résultats

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons et analysons les résultats des deux méthodes de résolution développées au chapitre précédent: approche par décomposition prix-flots de la section 4.2 et approche en nombres entiers définie par les équations (4.68) à (4.83) et (4.84) à (4.90). Le plan d'expériences que nous présentons dans ce chapitre se divise comme suit. Nous faisons d'abord une comparaison entre les deux méthodes en utilisant le réseau ARPA (Fratta, Gerla et Kleinrock (1973)) de 21 nœuds et 26 arcs. Cette comparaison nous permettra d'évaluer la qualité de la solution de l'heuristique de décomposition prix-flots par rapport à la solution de l'approche exacte en nombres entiers. On poursuivra en analysant la sensibilité de l'approche exacte en nombre entiers (temps de résolution et qualité de la solution) par rapport à certains facteurs tels que le type d'exploration, le niveau de congestion et le nombre de segments de la discrétisation des fonctions de délai.

Pour faciliter l'implantation des modèles en nombres entiers, on suppose que les demandes sont égales pour toutes les paires et normalisées à l'unité. Soit d la demande de chaque paire et C_a la capacité de chaque arc du réseau considéré. En divisant la capacité et la demande par d , on a un nouveau réseau de capacité $C'_a = C_a/d$ et chaque paire a une demande égale à 1 unité (par exemple si la demande initiale est de 64 kbps, la nouvelle demande est une unité de 64 kbps). Le flot sur un arc a est $f'_a = f_a/d$. Donc la formule du délai devient $f'_a/(C'_a - f'_a)$. En divisant le dénominateur par C'_a la variable de la fonction de délai devient $X_a = f'_a/C'_a$ qui appartient à l'intervalle $[0, 1)$.

Ceci permet d'approximer la fonction de délai sur l'intervalle $[0, 1)$. Afin de diminuer la dégénérescence créée par la linéarisation des contraintes de complémentarité, nous avons ajouté dans l'objectif une faible perturbation (de l'ordre de 10^{-4}) des coefficients des variables binaires z . Cette perturbation a été ajoutée pour tous les tests du modèle NEPI, et pour les tests avec huit (8) paires et plus pour le modèle NEPD.

Tous les résultats ont été obtenus sur un ordinateur Sun Ultra 60, 400 Mhz avec 526 Mo. Les solutions de l'approche de décomposition prix-flots ont été obtenues en utilisant une variante d'un code en langage C pour résoudre le problème d'acheminement au second niveau, ainsi que Cplex 6.0 pour résoudre le programme linéaire. La version 6.0 de Cplex a aussi été utilisée pour résoudre les problèmes en nombres entiers générés à l'aide d'un script écrit en GAMS.

5.2 Comparaison des deux approches de résolution

Les tests numériques pour les deux approches sont faits pour le réseau ARPA de la figure 5.1. Le réseau ARPA, très utilisé dans la littérature pour des tests sur des réseaux de télécommunications, était un réseau de paquets connectant plusieurs centres informatiques universitaires des États-Unis. Ce réseau contient 21 nœuds et 26 arcs bidirectionnels. Pour nos tests, nous considérons que la capacité des liens est égale à 5 fois la demande des paires origine-destination. Ces 26 arcs sont divisés en deux sous-ensembles A_1 et A_2 . Le sous-ensemble A_2 a 19 arcs (en trait fin). Ces arcs appartiennent à des fournisseurs de services qui ont déjà fixé leur prix. Dans le sous-ensemble A_1 , on trouve les 7 autres arcs (en trait plein foncé) qui appartiennent au nouvel fournisseur de service qui doit déterminer les prix sur ses arcs pour les flots des paires ayant une demande non nulle. La comparaison des deux approches est faite en résolvant successivement les modèles de chaque approche pour des problèmes identiques. Chaque problème considéré est défini par un sous-ensemble de paires de

Tableau 5.1 Prix sur les arcs de A_2 (arcs de prix connus)

O_a	D_a	w_a	O_a	D_a	w_a	O_a	D_a	w_a
1	3	0.80	7	2	0.80	13	14	0.60
2	3	1.00	7	8	0.50	14	13	1.00
2	6	0.80	7	12	0.70	14	15	0.70
2	7	0.70	7	13	0.80	15	14	0.80
3	1	0.60	8	7	1.00	15	18	1.00
3	2	0.90	9	4	0.90	16	11	0.70
3	4	1.00	10	11	1.50	17	10	0.40
4	3	0.90	10	17	0.80	17	20	0.60
4	5	0.70	11	10	0.80	18	15	0.60
4	9	1.00	11	16	0.90	18	19	1.00
5	4	0.80	12	7	0.80	19	18	1.00
6	2	1.00	13	7	0.50	19	21	0.90
-	-	-	20	17	0.90	21	19	0.80

Pour effectuer les tests numériques, nous avons utilisé 7 intervalles d'approximation de la fonction de délai (figure 5.2), une constante $M = 10$ et un facteur $\bar{\alpha} = 0.01$. Notons que dans les modèles en nombres entiers, les prix correspondent à des variables libres. Dans le cas du modèle à prix non uniformes, si un prix d'un arc pour une paire est négatif, on l'indiquera dans le tableau des résultats seulement si l'arc achemine le flot de la paire. Sinon, on met ce prix à zéro dans le tableau.

Sur ce réseau ARPA, nous avons successivement considéré les quatre problèmes suivants:

P_1 : paire considérée 1-21;

P_2 : paires considérées 1-21, 7-4;

P_3 : paires considérées 1-21, 7-4, 2-9;

P_4 : paires considérées 1-21, 7-4, 2-9, 21-8.

Les tableaux 5.2 et 5.3 présentent les chemins et le revenu par chemin pour les quatre problèmes et pour les trois méthodes de résolution. On commence par identifier le problème résolu et l'approche utilisée. Puis, pour chaque paire origine-destination du

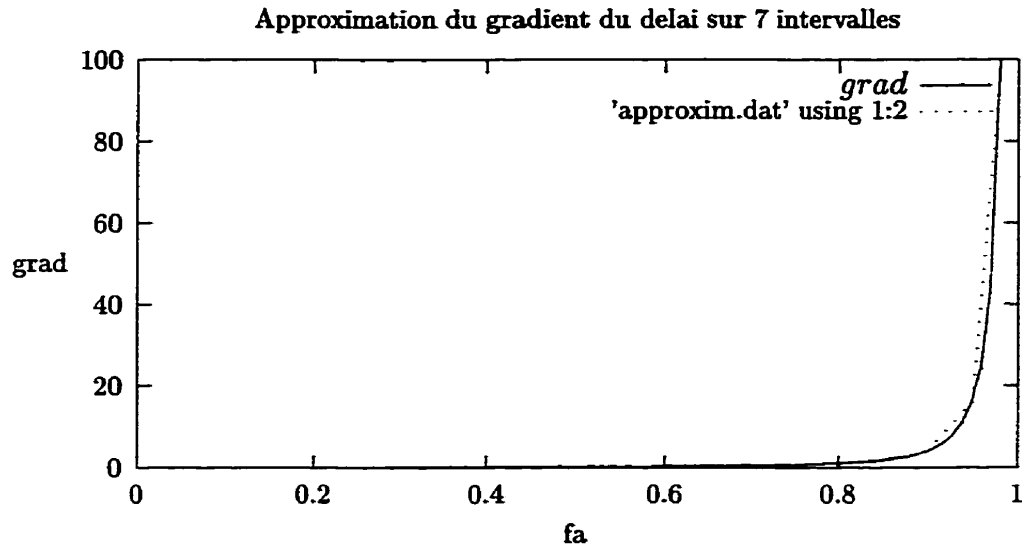


Figure 5.2 – *Approximation du gradient du délai pour une capacité égale à 5*

problème, on donne le flot de cette paire et le chemin qui porte ce flot. Et enfin, la dernière colonne du tableau est le revenu généré par ce chemin. Par exemple, lorsque le problème P_2 est résolu par l'approche DPF, la fraction 0.9928 du flot de la paire 7-4 passe par le chemin 7-8-4, et le revenu de ce chemin est 2.283896. Dans le tableau 5.4 on présente les prix optimaux sur les arcs taxables pour les paires origine-destination du problème P_4 pour les deux approches de résolution. Par exemple, le prix du flot de la paire 1-21 sur l'arc (20, 21) est 2.090319, -1.305056 et 1.347933 lorsque le problème est résolu respectivement par DPF, NEPD et NEPI. Ce tableau 5.4 nous permet aussi de voir que, pour les modèles dont les prix correspondent à des variables libres, le prix du flot d'une paire sur un arc peut être négatif. Ce prix négatif est une sorte d'incitatif que la compagnie offre à certains usagers pour qu'il puissent utiliser le chemin qui maximise le revenu de la compagnie pour leur paire origine-destination. Les prix optimaux pour les problèmes P_1 , P_2 , P_3 se trouvent à l'annexe 1.

Les valeurs des revenus de chaque problème résolu pour les deux approches sont données dans le tableau 5.5. Pour les problèmes P_1 et P_2 , les trois modèles des deux

Tableau 5.2 Chemins et revenus pour les problèmes P_1 , P_2 , P_3

Prob.	Paire	Approche	flot che.	Chemin	Revenu
P_1	1-21	DPF	0.9973	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.780967
	1-21		0.0027	1-2-7-13-14-15-18-19-21	0.004592
	1-21	NEPD	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.789553
	1-21	NEPI	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.789553
P_2	1-21	DPF	0.9928	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.769777
			0.0072	1-2-7-13-14-15-18-19-21	0.012243
	7-4		0.9928	7-8-4	2.283896
			0.0072	7-2-3-4	0.00
	1-21	NEPD	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.794777
	7-4		1	7-8-4	2.300111
	1-21	NEPI	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.794777
	7-4		1	7-8-4	2.300111
P_3	1-21	DPF	0.9618	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.652054
			0.0382	1-2-7-13-14-15-18-19-21	0.064956
	2-9		0.9618	2-7-12-11-10-9	0.763569
			0.0382	2-3-4-9	0.00000
	7-4		0.9618	7-8-4	2.2132787
			0.0382	7-2-3-4	0.00000
	1-21	NEPD	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.796519
	2-9		1	2-7-8-4-9	0.7957778
	7-4		1	7-8-4	2.299481
	1-21	NEPI	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.4862971
	2-9		1	2-7-12-11-10-9	0.793333
	7-4		1	7-8-4	2.300667

Tableau 5.3 Suite du tableau 5.2 résultats pour le problème P_4

Prob.	Paire	Approche	flot che.	Chemin	Revenu
P_4	1-21	DPF	0.975	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.695784
			0.025	1-2-7-13-14-15-18-19-21	0.0425057
	2-9		0.975	2-7-12-11-10-9	0.770888
			0.025	2-3-4-9	0.00
	7-4		0.975	7-8-4	2.242764
			0.025	7-2-3-4	0.00
	21-8		0.975	21-20-17-10-11-12-7-8	1.063061
			0.025	21-19-18-15-14-13-7-8	0.00
	1-21	NEPD	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.796519
	2-9		1	2-7-12-11-10-9	0.795000
	7-4		1	7-8-4	2.300056
	21-8		1	21-20-17-10-9-4-8	2.996055
	1-21	NEPI	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	2.741055
	2-9		1	2-7-12-11-10-9	0.795
	7-4		1	7-8-4	0.851833
	21-8		1	21-20-17-10-9-4-8	2.996055

approches donnent approximativement les mêmes résultats, tant du point de vue de la valeur optimale du revenu de la compagnie et du chemin utilisé par les usagers pour acheminer leur flot. Pour les problèmes P_3 et P_4 , une différence remarquable est constatée entre les valeurs optimales des revenus même quand les chemins sont les mêmes. En particulier pour le cas de trois paires, le revenu du modèle en nombres entiers à prix non uniformes est supérieur à la valeur optimale du revenu du modèle de l'approche par décomposition prix-flots qui, de son côté est supérieur à celle du modèle en nombres entiers à prix uniformes. Dans le cas de quatre paires, l'ordre entre les valeurs optimales reste dans le même sens que dans le cas de trois paires mais avec un plus grand écart entre les valeurs.

La différence qui existe entre les valeurs optimales des deux modèles en nombres entiers s'explique par le fait qu'on peut considérer le modèle en nombres entiers à prix non uniformes comme une relaxation du modèle à prix uniformes. Donc il est normal que le revenu d'une compagnie qui utilise le modèle à prix uniformes soit inférieur ou

Tableau 5.4 Prix pour un exemple ayant quatre paires du problème P_4 ($C_a = 5$)

				prix w pour les modèles		
paire		arc a		DPF	nombres entiers	
O_p	D_p	O_a	D_a		w différents	w identiques
1	21	1	2	1.700229	1.700056	1.394611
1	21	4	8	0.0000	1.100944	0.8518333
1	21	5	6	0.0000	1.5005	0.7522778
1	21	9	10	2.209326	6.404833	0.7963889
1	21	12	11	0.0000	3.399722	-0.00138889
1	21	15	16	0.0000	2.9010	0.799111
1	21	16	15	2.095724	0.0000	0.799111
1	21	20	21	2.090319	-1.305056	1.347833
1	21	21	20	0.000	1.302278	1.347833
2	9	2	1	1.501118	0.1990556	1.394611
2	9	6	5	0.700899	1.9005	0.7522778
2	9	8	4	0.797493	0.7972778	0.8518333
2	9	10	9	1.8000	-0.0013888	0.7963889
2	9	12	11	0.790655	0.7963889	-0.00138889
2	9	15	16	0.0000	1.699556	0.799111
2	9	20	21	0.0000	0.0000	1.347833
2	9	21	20	0.194822	0.6981667	1.347833
7	4	2	1	1.099734	0.1990556	1.394611
7	4	6	5	0.39952	0.3995	0.7522778
7	4	8	4	2.300271	2.300056	0.8518333
7	4	10	9	0.000	0.8990556	0.7963889
7	4	12	11	1.196098	3.302389	-0.00138889
7	4	15	16	0.0000	2.601889	0.799111
7	4	21	20	0.0000	0.499611	1.347833
21	8	1	2	0.000	0.1990556	1.394611
21	8	4	8	1.201983	-0.4018333	0.851833
21	8	6	5	0.0000	0.2995	0.7522778
21	8	8	4	0.0000	0.3990556	0.851833
21	8	10	9	1.606548	0.1972778	0.79063889
21	8	11	12	0.0000	1.699611	-0.00138889
21	8	15	16	1.599641	2.201889	0.799111
21	8	21	20	1.090319	3.200611	1.347833

Tableau 5.5 Valeurs des revenus optimaux pour les différents scénarios et les différents modèles

Problème	Val. opt. DPF	Val. opt. NEPD	Val. opt. NEPI
P_1	3.785559	3.789553	3.789553
P_2	6.065916	6.094888	6.094888
P_3	6.693857	6.891777	6.5802971
P_4	7.815	9.88763	7.383943

égal au revenu d'une autre compagnie qui utilise le modèle à prix non uniformes.

Il n'y a aucun doute sur la différence qui existe entre les modèles NEPI et NEPD. Mais, dans le cas où ces modèles sont résolus pour une paire, on s'attendrait à trouver les mêmes solutions optimales pour les deux modèles qui sont alors équivalents. Cependant, à cause de la dégénérescence, on peut trouver deux vecteurs prix différents qui engendrent la même valeur optimale pour les deux modèles tels que trouvé dans la résolution du problème P_1 dont les prix sont donnés dans le tableau A.1.

L'approche par décomposition prix-flots impose des prix non négatifs sur les arcs tarifables. C'est donc une restriction par rapport à l'approche en nombres entiers à prix différents sur les arcs pour chaque paire origine-destination. Cette restriction, liée au fait que cette approche est une heuristique, fait que la valeur optimale de l'approche DPF sera toujours inférieure (à la précision de la discrétisation) à celle de l'approche NEPD.

Selon le tableau 5.6, la solution est calculée plus rapidement par la méthode en nombres entiers que la méthode DPF. L'augmentation du temps de résolution de l'approche DPF est une conséquence de la recherche linéaire qui détermine le facteur de déviation de flots et du critère d'arrêt dans le problème d'acheminement. Ce facteur est d'autant plus important qu'il joue un grand rôle dans l'obtention du flot optimal au second niveau. Le critère utilisé est 10^{-3} . Le temps de résolution de l'approche DPF est aussi lié au prix initial car plus le prix initial est proche de l'optimalité plus on trouve rapidement le point d'équilibre entre le meneur et le suiveur. Pour l'approche

en nombres entiers, la différence entre les temps de résolution pour les problèmes P_1 et P_2 n'est pas significative; mais à partir de trois paires le modèle NEPD se résout beaucoup plus vite que le modèle NEPI.

Tableau 5.6 Temps de résolution en seconde pour les quatre problèmes

problème	Temps DPF	Temps NEPD	Temps NEPI
P_1	4.55	0.14	0.09
P_2	5.54	0.18	0.15
P_3	8.04	0.36	4.28
P_4	10	0.44	66.26

Pour regarder l'influence de la congestion sur les trois modèles, on a diminué la capacité pour le problème P_4 à quatre paires. Quand la capacité est égale à trois ($C_a = 3$), le temps de résolution du modèle NEPI est très élevé; mais quand $C_a = 4$, le modèle converge en une solution d'équilibre et les deux modèles en nombres entiers trouvent leurs valeurs optimales, quoique le modèle NEPI prenne 10,299 secondes. L'approche DPF et le modèle NEPD prennent les même temps que pour $C_a = 5$. Le revenu optimal pour l'approche DPF, le modèle NEPI et le modèle NEPD sont respectivement 7.894857, 7.366835, et 9.873240. Le tableau 5.7 donne les chemins des deux approches pour une capacité égale à quatre fois la demande.

Dans la section (5.3), nous analysons les deux approches en nombres entiers sans prendre en considération l'approche par décomposition prix-flots. Cette mise en veilleuse de l'approche DPF est liée au fait que les caractéristiques de la solution trouvée ne sont pas connues. Cependant nous admettons que cette approche peut être très utile dans le développement algorithmique pour résoudre de gros problèmes, car dans la pratique l'approche Gauss-Seidel est très utilisée dans la résolution des problèmes de grande taille. Et de plus, la valeur de la solution trouvée par l'approche DPF peut constituer une borne inférieure au problème en nombres entiers, qui peut permettre d'améliorer le temps de résolution du problème en nombres entiers.

Tableau 5.7 Chemins et revenu pour le problème P_4 avec capacité $C_a = 4$

Prob.	Paire	Approche	flot che.	Chemin	Revenu
P_4 $C_a = 4$	1-21	DPF	0.9989	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.764335
			0.0011	1-2-7-13-14-15-18-19-21	0.0425057
	2-9		0.9989	2-7-12-11-10-9	0.767619
			0.0011	2-3-4-9	0.00
	7-4		0.9989	7-8-4	2.297614
			0.0011	7-2-3-4	0.00
	21-8		0.9989	21-20-17-10-11-12-7-8	1.065286
			0.0011	21-19-18-15-14-13-7-8	0.00
	1-21	NEPD	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	3.79
	2-9		0.6	2-7-12-11-10-9	0.475849
			0.4	2-7-8-4-9	0.319170
	7-4		1	7-8-4	2.298568
	21-8		1	21-20-17-10-9-4-8	2.989644
	1-21	NEPI	1	1-2-7-12-11-10-17-20-21	2.792053
	2-9		0.6	2-7-12-11-10-9	0.475044
	2-9		0.4	2-7-8-4-9	0.317170
	7-4		1	7-8-4	0.792925
	21-8		1	21-20-17-10-9-4-8	2.989643

5.3 Analyse de la méthode en nombre entiers

Dans cette section, nous analysons les deux approches en nombres entiers mixtes. Dans un premier temps, nous étudions le meilleur type d'exploration des nœuds de l'arbre de branchement pour les deux modèles. Nous verrons également comment la congestion a un effet sur le temps de résolution ainsi que sur le revenu optimal, suivi par une analyse de l'impact du nombre d'intervalles d'approximation de la fonction du délai. Et enfin l'influence du paramètre M sur la solution optimale du modèle et le temps de résolution sera étudié.

Type d'exploration de l'arbre de branchement

On considère deux types d'exploration de l'arbre de branchement: l'exploration en largeur et l'exploration en profondeur (et les paramètres par défaut de Cplex). En

augmentant le nombre de paires origine-destination de 1 à 6, et pour chaque nombre de paires considéré, on résout les modèles en nombres entiers obtenus pour chaque type d'exploration. Chaque nombre de paires définit un cas, et les paires d'un cas donné sont les paires du cas précédent auxquelles on ajoute une nouvelle paire. Par exemple, les paires du Cas 3 sont 1-21, 7-4 (paire du Cas 2) ajoutées à la paire 2-9. Les modèles en nombres entiers sont construits en considérant sept (7) intervalles d'approximation des fonctions non linéaires et une constante $M = 10$. Dans la stratégie d'exploration de Cplex pour les modèles en nombres entiers, la stratégie en largeur donne généralement de meilleurs temps que la stratégie en profondeur. Le tableau 5.8 confirme aussi que le modèle en nombres entiers à prix uniformes est beaucoup plus difficile à résoudre que le modèle à prix non uniformes.

Tableau 5.8 Types d'exploration et temps de résolution

Cas		1	2	3	4	5	6
paire ajoutée		1-21	7-4	2-9	21-8	4-15	12-3
NEPD	Cpu (sec) Br. Lar.	0.14	0.18	0.36	0.44	0.60	1.02
	Cpu (sec) Br. Pro.	0.45	4.04	16.60	68.67	164.94	657.74
NEPI	Cpu (sec) Br. Lar.	0.23	0.38	4.28	65.20	398.07	777.52
	Cpu (sec) Br. Pro.	0.07	0.15	5.16	128.80	—	—

Par ailleurs, si le modèle en nombres entiers à prix identiques se résout difficilement à partir de cinq paires, et cela, malgré la perturbation de la fonction objectif pour diminuer la dégénérescence, le modèle en nombres entiers à prix différents peut être facilement résolu jusqu'à huit paires (sans perturbation de la fonction objectif). Mais à partir de neuf paires, il est préférable d'introduire la perturbation dans l'objectif pour réduire le temps de résolution. Avec cette perturbation, un problème de douze (12) paires (tableau 5.9) est encore résolu dans un temps raisonnable. Il faut souligner que le modèle NEPI appliqué aux problèmes de 5 et de 6 paires ont été résolus à l'aide de paramètres différents de ceux par défaut de Cplex ("lower cutoff" = 8.0, "presolve" = no et "variable select" = strong branching).

Tableau 5.9 Types d'exploration et temps de résolution

Cas	7	8	9	10	11	12
paire ajoutée	18-6	3-15	12-1	2-21	8-4	6-8
Cpu (sec)	3.22	19.38	36.71	138.23	107.33	54.77

Les tests pour les types de branchement permettent aussi de constater que certains modèles ont des solutions optimales multiples pour le leader. Par exemple, dans le cas d'une paire, l'exploration en largeur et l'exploration en profondeur engendrent deux vecteurs de prix différents qui, pour le même vecteur flot du suiveur, donnent le même revenu optimal (voir le tableau 5.10). Les composantes qui sont différentes sont celles portant le flot de la paire considérée.

Tableau 5.10 Types de branchement et prix optimal pour la paire 1-21

prix	w_{12}^{121}	w_{1211}^{121}	w_{2021}^{121}
Br. Lar.	1.7002	4.3044	-2.2151
Br. Prof.	1.7002	3.4024	-1.3131

Congestion du réseau, revenu optimal et temps de résolution

Dans notre modèle, la congestion, définie par le délai sur le réseau, est considérée comme le facteur de qualité de service. La variation du délai est une conséquence de la variation de la demande totale des usagers par rapport à la capacité totale du réseau ou, réciproquement, la variation de la capacité par rapport à la demande. Une variation de la demande peut être causée par une augmentation du nombre de paires, ou par un accroissement de la demande des paires existantes. Dans le cas où la demande varie à cause d'une augmentation du nombre de paires du réseau, les tests pour les types d'exploration montrent que le temps de résolution du modèle augmente quand il y a une augmentation de la demande. S'il s'agit d'une augmentation de la demande d'un nombre constant de paires, on considérera que la demande de chaque paire origine-destination augmente dans la même proportion et la capacité des arcs

reste constante.

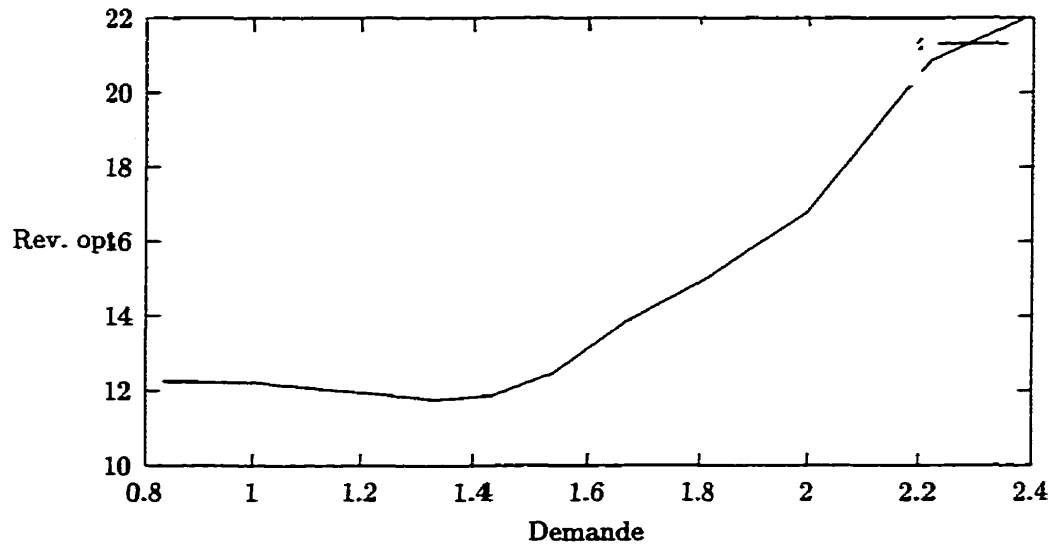


Figure 5.3 – *Courbe du revenu optimal en fonction de la congestion: NEPD-six paires*

Les graphes des figures 5.3 et 5.4, trouvés pour des problèmes NEPD ayant respectivement six et sept paires origine-destination, montrent l'allure du revenu optimal avec une variation de la congestion. Sur ces graphiques, on observe qu'en faisant croître la congestion à partir d'une valeur aussi petite que possible, le revenu diminue jusqu'à une valeur minimale, et à partir de cette valeur minimale le revenu croît avec la congestion. Cette remarque est aussi confirmée pour le modèle NEPI par le graphe de la figure 5.5 tracé pour un problème de trois (3) paires. A partir de ces graphiques on admet que plus la congestion (tous les arcs ont même capacité) est grande plus le revenu de la compagnie est élevé. Cela s'explique par la relation entre l'offre et la demande, car la congestion reflète la relation entre la demande des usagers et la capacité disponible (l'offre de la compagnie). Dans tout modèle de tarification quand la demande se rapproche de l'offre, le prix du produit s'élève et le revenu de l'offreur du produit augmente.

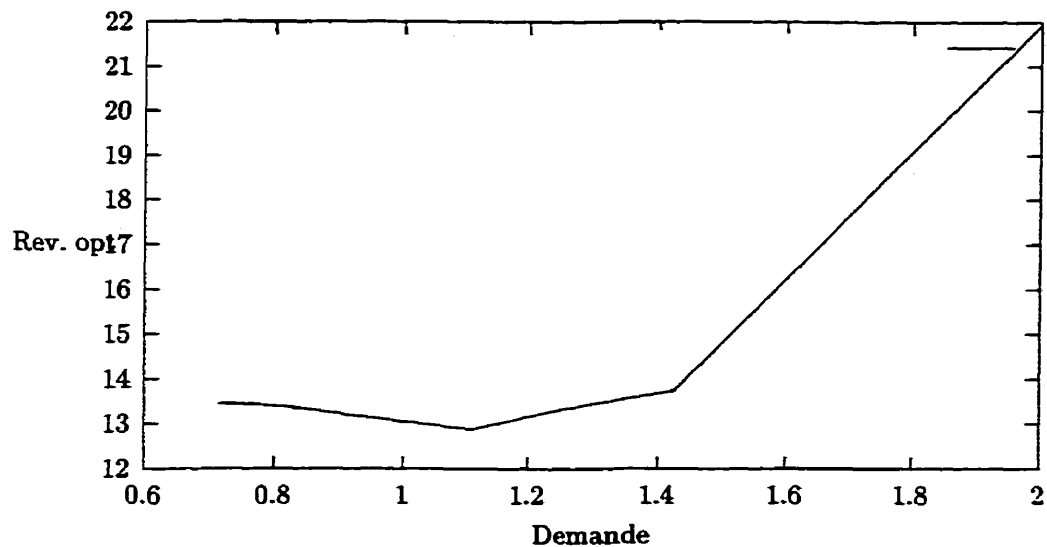


Figure 5.4 – Courbe du revenu optimal en fonction de la congestion: NEPD-sept paires

Quand la demande augmente (augmentation de la congestion) le revenu augmente en cherchant une direction asymptotique parallèle à l'axe des y . La valeur maximale de la demande pour le problème de six (6) paires est entre 2.38 et 2.5, car quand $d=2.38$ la solution optimale du problème est 21.966545 mais à $d=2.5$ le problème devient irréalisable. De même pour le problème de sept (7) paires cette valeur maximale est entre 2.0 et 2.1. Selon les tableaux 5.11 et 5.12 le temps de résolution n'est pas lié à la

Tableau 5.11 Temps de résolution et variation de la demande pour NEPD

Capacité	2.38	2.22	2.00	1.67	1.53	1.25	1.11	1.00	0.90	0.83
Cpu (sec)	53.79	177.17	30.04	27.89	3.17	13.27	3.33	0.95	1.13	2.60

congestion par une relation uniforme mais prend des valeurs beaucoup plus grandes quand la demande augmente. Cette augmentation du temps de résolution s'explique par le fait que l'ensemble réalisable du problème dual devient plus grand quand la demande augmente.

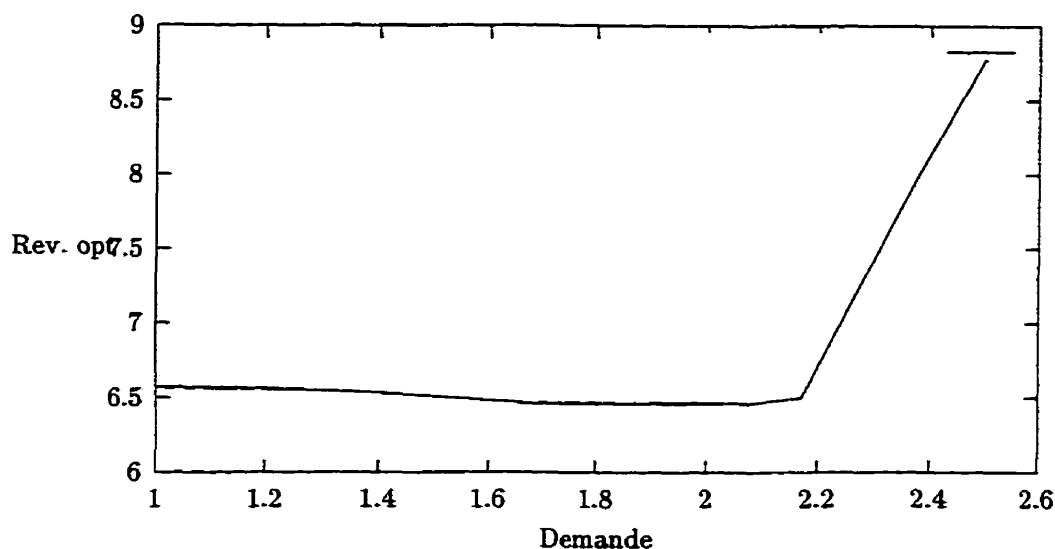


Figure 5.5 – Courbe du revenu optimal en fonction de la congestion: NEPI-trois paires

Nombre d'intervalles d'approximation: temps de résolution et valeur optimale

Un des paramètres qui joue un rôle important dans l'approche en nombre entiers est le nombre de morceaux de l'approximation linéaire de la fonction de délai. Plus ce nombre est grand, plus on s'approche de la forme de la fonction de délai généralement utilisée dans les modèles d'optimisation de routage, mais on augmente aussi le nombre de variables entières des modèles en nombres entiers mixtes. Les tests numériques présentés permettent de voir que le temps de résolution augmente avec l'augmentation du nombre d'intervalles d'approximation et la valeur optimale des modèles est faiblement améliorée. Le tableau 5.13 présente l'évolution du temps de résolution et de la valeur optimale pour les deux modèles en nombres entiers en considérant que seule les paires 1-21, 2-9 et 7-4 ont une demande non nulle. Dans le

Tableau 5.12 Temps de résolution et variation de la demande pour NEPI

Capacité	2.5	2.38	2.72	2.22	2.17	2.08	2.00	1.67	1.25
Cpu (sec)	99.58	715.48	722.47	1019.80	642.93	488	165.92	34	4.98

Tableau 5.13 Temps de résolution et valeur optimale des deux modèles en nombres entiers par rapport au nombre d'intervalles d'approximation pour les paires 1-21, 2-9 et 7-4.

	# Intervalles	5	7	10	13
NEPD	cpu (sec)	0.23	0.36	0.63	2.80
	Rev.opt	6.876667	6.887037	6.891891	6.893607
NEPI	cpu (sec)	1.62	2.94	5.49	3,844.76
	Rev. opt	6.568884	6.5825	6.586	6.5879

tableau (5.14), on ne considère que le modèle NEPD lorsque les paires 1-21, 2-9, 7-4, 21-8, 4-15 et 12-3 ont une demande non nulle. Dans chaque cas, la fonction de délai est approximée sur 5, 7, 10, 13 intervalles et la valeur de M est 10.

En conclusion, l'amélioration de la valeur optimale quand le nombre d'intervalles augmente n'est pas significative car la forme de la fonction de délai reste approximative.

Valeur de M et le temps de résolution

On a vu qu'il est possible de linéariser les contraintes de complémentarité à l'aide des variables binaires et des constantes M . Ces contraintes sont de la forme des équations (4.25) et (4.26) de la section 4.3. On obtient les nouvelles contraintes suivantes:

$$\forall (a, p) \in A_1 \times P \quad w_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p \leq M z_a^p,$$

$$\forall (a, p) \in A_1 \times P \quad f_a^p \leq M(1 - z_a^p),$$

$$\forall (a, p) \in A_2 \times P \quad \bar{w}_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p \leq M z_a^p,$$

$$\forall (a, p) \in A_2 \times P \quad f_a^p \leq M(1 - z_a^p).$$

où M est une constante de valeur appropriée. Cette valeur peut être définie par la relation

$$M = \sup(d^p, w_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p). \quad (5.1)$$

Tableau 5.14 Temps de résolution et valeur optimale du modèle NEPD par rapport au nombre d'intervalles d'approximation pour les paires 1-21, 2-9, 7-4, 21-8, 4-15, et 12-3.

	# Intervalles	5	7	10	13
NEPD	cpu (sec)	0.94	1.42	1.74	5.87
	Rev.opt	12.221711	12.223049	12.228746	12.2290

En effet, si la variable entière vaut 0 on a $f_a^p \leq M$, et la plus grande valeur que puisse prendre f_a^p est la demande de la paire donc M doit être au moins égale à la demande des paires. Dans le cas où la variable entière vaut 1, l'inégalité $w_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p \leq M$ doit être vraie. Alors une valeur de M appropriée pour résoudre le modèle en nombre entiers peut être définie par la relation (5.1). Le deuxième terme de l'équation (5.1) correspond à l'écart maximum entre le potentiel de deux nœuds adjacents moins le coût de l'arc.

La valeur de d^p est connue mais la valeur $w_a^p + \frac{\bar{\alpha}_a C_a}{\gamma(C_a - f_a)^2} - \lambda_j^p + \lambda_i^p$ qu'on peut mettre sur l'arc est véritablement déterminée par la résolution du modèle. Mais il existe une valeur maximale qu'elle peut prendre pour permettre aux compagnies de maximiser leur revenu et aux usagers de minimiser leur coût sur l'arc considéré.

En se référant à l'équation (5.1), on peut dire que, pour les modèles en nombres entiers résolus dans ce travail, la valeur de M est au moins supérieure ou égale à 1 car les demandes des paires considérées sont égales à 1. Cependant, la valeur de l'écart maximum entre le potentiel de deux nœuds moins le coût de l'arc n'est pas connue. Pour cela, on essaie de voir quelle est l'influence de certaines valeurs de M en commençant par $M = 2$. En considérant cinq intervalles d'approximation de la fonction de délai et six paires pour le modèle à prix non uniformes, on résout pour les valeurs 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30 de M pour avoir une idée de son influence sur le temps de résolution et la valeur optimale des modèles. Dès qu'on trouve une valeur de M qui donne la solution optimale pour le nombre d'intervalle considéré, les autres valeurs supérieures ne jouent aucun rôle sur la valeur optimale. C'est pour cela, dans le

tableau 5.15 à partir de $M = 4$, la valeur du revenu du problème résolu est remplacée par un (*) qui signifie que toutes ces valeurs correspondent à celle trouvée pour $M=3$. Ces valeurs de M font varier le temps de résolution d'une façon non uniforme. Dans le cas du modèle NEPI, on considère trois paires de nœuds et cinq intervalles

Tableau 5.15 Relation entre M et le temps de résolution pour NEPD

M	2	3	5	10	15	20	25	30
Temps (sec)	2.61	1.90	0.94	0.95	1.26	2.60	0.95	1.26
Rev.	11.7197	12.22175	*	*	*	*	*	*

d'approximation de la fonction objectif. A partir du tableau 5.16, on peut déduire la même constatation relative au temps de résolution que dans l'exemple résolu pour le modèle en NEPD. Cependant à partir d'une certaine valeur de M , il y a toujours une différence entre les valeurs optimales. Ceci s'explique par la perturbation créée dans la fonction objectif. Cette petite différence est normale car la perturbation est directement liée aux variables binaires qui, avec la constante M , ont permis d'éliminer les contraintes de complémentarité.

Tableau 5.16 Relation entre M et le temps de résolution pour NEPI

M	2	3	5	10	15	20
Temps (sec)	1.25	0.78	0.43	1.52	1.96	0.86
Rev.	3.585201	5.478923	6.568794	6.568889	6.568907	6.568955

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats des tests numériques pour les deux approches de résolution. À partir de quatre problèmes définis suivant le nombre de paires de demande non nulle, on a comparé les valeurs optimales et les temps de résolution des deux approches, pour ensuite faire une analyse de sensibilité de l'approche en nombres entiers. Pour les problèmes P_1 et P_2 , les solutions optimales

des trois modèles sont identiques, mais pour les problèmes P_3 et P_4 la solution du modèle NEPD est meilleure que celle de l'approche DPF qui est meilleure que le modèle NEPI. A partir de cette analyse de sensibilité, on constate que l'exploration en largeur est meilleure que l'exploration en profondeur de l'arbre de branchement des modèles en nombres entiers, que le revenu optimal de la compagnie croît avec la congestion et qu'à partir d'une certaine valeur de M le revenu est indépendant de M et le temps de résolution a tendance à croître quand M augmente.

CHAPITRE 6

Conclusions et recommandations

Dans ce travail de mémoire, nous avons développé un modèle qui permet de maximiser le revenu d'une nouvelle compagnie sur un réseau de communications en déterminant les prix d'écoulement du flot des usagers sur ses arcs. Ces prix sont déterminés en prenant en considération la présence des autres compagnies et la réaction rationnelle des usagers définie par la minimisation de leur coût qui a deux composantes: le coût de l'écoulement du flot et le coût consenti par les usagers pour minimiser le délai, facteur d'amélioration de la qualité de service.

La modélisation du problème a été faite à l'aide du paradigme de la programmation mathématique à deux niveaux. Au premier niveau, on maximise le revenu de cette nouvelle compagnie qui constitue le meneur du problème. Au second niveau, les usagers minimisent leur coût en acheminant leurs flots de façon la plus économique possible. A cause des expressions du délai, le modèle à résoudre est un modèle de programmation mathématique à deux niveaux non linéaire, un problème connu comme NP-complet. Grâce à des propriétés liées à la programmation mathématique à deux niveaux et vérifiées pour le problème TOT, le modèle à deux niveaux est transformé en un modèle d'un seul niveau en remplaçant le problème d'acheminement des usagers par les conditions d'optimalité de Lagrange-Kuhn-Tucker. Ce modèle d'un seul niveau reste non linéaire et non convexe. A partir du modèle d'un seul niveau, deux approches de résolution ont été développées. La première approche est de type Gauss-Seidel et permet de résoudre le problème en le décomposant en deux sous-problèmes. Le premier sous-problème résout, pour un vecteur prix fixé, le problème d'acheminement des usagers qui vise à minimiser le coût total des usagers. L'algorithme de Frank-Wolfe

communément appelé dans ce contexte *déviatio*n de flots est utilisé pour résoudre ce dernier problème. A partir du flot optimal f^* du problème d'acheminement, on construit le deuxième sous-problème en remplaçant la variable f du programme d'un seul niveau par cette valeur du flot optimal f^* . Grâce à cette substitution, le programme d'un seul niveau qui était non linéaire, devient linéaire. La résolution de ce programme linéaire donne le prix optimal qui maximise le revenu quand les usagers acheminent cette valeur de f . En résolvant itérativement ces deux sous-problèmes on trouve un point d'équilibre entre le meneur et le suiveur.

Dans la deuxième approche, le problème est résolu en utilisant un modèle en nombres entiers mixte. On trouve le modèle en nombres entiers mixte après des transformations mathématiques qui permettent de:

- substituer à l'objectif du modèle d'un seul niveau un objectif linéaire équivalent,
- approximer la fonction de délai par une fonction linéaire par morceaux,
- remplacer les équations de complémentarité par des inéquations linéaires en utilisant des variables qui captent les écarts complémentaires et une constante de valeur appropriée.

Deux variantes de modèles en nombres entiers ont été résolues. Une permet de trouver un prix qui peut différer pour chaque commodité (NEPD) sur les liens, et l'autre trouve un prix identique pour toutes les commodités sur les liens (NEPI).

Ce mémoire a permis de développer un modèle et une approche exacte de résolution pour un problème de tarification en télécommunication (réseaux à commutation de paquets de type M/M/1) à l'aide du paradigme de la programmation mathématique à deux niveaux. D'autres facteurs devraient être étudiés pour rendre le modèle davantage adapté à la réalité que connaissent aujourd'hui les acteurs du marché des

télécommunications. Ainsi on pourrait s'intéresser aux réseaux à commutation de circuits en considérant l'aspect stochastique ainsi qu'aux réseaux numériques à intégration de services où les prix et le facteur de qualité de service dépendent des différents services.

Enfin, on doit également poursuivre les développements algorithmiques afin de résoudre des problèmes de taille réaliste en particulier par l'étude d'inégalités valides.

RÉFÉRENCES

AIYOSHI, E., SHIMIZU, K. 1981 Hierarchical Decentralized Systems and its New Solution by a Barrier Method. IEEE, Transactions on Systems, Man, and Cybernetic, 11 444-449.

BARD, J. F. (1984a). Optimality Conditions for the Bilevel Programming Problem. Naval Research Logistics Quarterly, 31, 13-25.

BARD, J. F. (1984b). An Investigation of the Linear Three-Level Programming Problem. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 14, 711-717.

BARD, J.F., FALK, J.E. (1982). An Explicit Solution to the Multi-Level Programming Problem. Computers & Operations Research, 9, 77-100.

BARD J.F., ISHIZUKA, Y., SHIMIZU, K. (1997). Non differentiable and Two-Level Mathematical Programming. Kluwer Academic Publishers, Boston.

BARD, J.F., MOORE, J.T. (1990). A Branch and Bound Algorithm for the Bilevel Programming Problem. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 11, 281-292.

BENCHEICK, A. (1997). Conception et Tarification d'un Réseau Privé Multidébit à Large Bande dans un Environnement Concurrentiel. Thèse de Doctorat 1997, Institut National de Recherche Scientifique (INRS)-Télécommunications 255 p.

BERTSEKAS, R., GALLAGER, R. (1987). Data Networks, Englewood Giffs, NJ 486 p.

BIALAS, W., KARWAN, M. (1982). On Two-Level Optimization. IEEE-Transaction on Automatic Control, 27, 211–214.

CALAMAI, P.H., VICENTE, L.N. (1994). Bilevel and Multilevel Programming: a Bibliography Review. Journal of Global Optimization, 5, 291–306.

CANDLER, W., NORTON, R.D. (1977). Multilevel Programming, Discussion Paper, No 20, World Bank Development Research Center, Washington, DC.

CANDLER, W., TOWSLEY R. (1982). A Linear Two-Level Programming Problem. Computers and Operations Research, 9, 59–76.

CHEN, Y., FLORIAN, M. (1995). The Nonlinear Bilevel Programming Problem: Formulations, Regularity and Optimality Conditions. Optimization, 32, 193–209.

COCCHI, R. et al. (1990). Pricing in Computer Networks: Motivation, Formulation, and Example. IEEE/ACM Transactions on Networking, 1, 614–627.

DEWAN, S., MENDELSON, H. (1990). User Delay Costs and Internet Pricing for a Service Facility. Management Science, 36, 1502–1517.

DHOLAKIA, R.R., HARLAM, B. (1994). Telecommunications and Economic Development, Econometric Analysis of the US Experience. Telecommunications Policy, 18, 470–477.

FAUSTINO, A.M., JÚDICE, J.J. (1992). A Sequential LCP Method for Bilevel Linear Programming. Annals of Operations Research, 34, 89–106.

FORTUNY, J., MCCARL, B.A. (1982). A Representation and Economic Interpretation of a Two-Level Programming Problem. Journal the Operations Research Society, 32, 59–76.

FRATTA, L., GERLA, M., KLEINROCK (1973). The Flow Deviation Method: An Approach to Store-and-Forward Communication Network Design. Networks, **3**, 97–133.

GAUVIN, J., SAVARD, G. (1994). The Steepest Descent Direction for the Nonlinear Bilevel Programming Problem. Operations Research Letters, **15**, 275–282.

GAVISH, B. (1991). Topological Design Telecommunication Networks - Local Access Design Methods. Annals of Operations Research, **33**, 17–71.

GAVISH, B., HANTLER, S. L. (1983). An Algorithm for Optimal Selection in SNA Networks. IEEE Transaction on Communications, Vol.Com, **31**, 1154–1161.

GIRARD, A (1993). Revenue Optimization of Telecommunications Networks. IEEE Transactions on Communications, **41**, 583–591.

GIRARD, A., ZIDANE, R. (1995). Revenue Optimization of B-ISDN Networks. IEEE Transactions on Communications, **43**, 15–25.

HANSEN, P., JAUMARD, B., SAVARD, G. (1992). New Branch-and-Bound Rules for Linear Bilevel Programming. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, **13**, 1194–1217.

JÚDICE, J., SAVARD, G., VICENTE, L. (1994). Descent Approaches for Quadratic Bilevel Programming. Journal of Optimization Theory and Applications, **81**, 379–399.

KELLY, F., SOLOMON, J., WALKER, D. (1997). Tariffing in the New IP/ATM Environment. Telecommunications Policy, **21**, 283–295.

KOLSTAD, C., LASDON, L. (1990). Derivative Evaluation and Computational Experience with Large Bilevel Mathematical Programs. Journal of Optimization Theory and Applications, **65**, 485–499.

- LABBÉ, M., MARCOTTE, P., SAVARD, G. (1998). A Bilevel Model of Taxation. Management Science, 44, 1608–1622.
- LUO, Z.Q., PANG, J.S., RALPH, D., (1996) Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, Cambridge University Press, Cambridge.
- MENDELSON, H., WANG, S. (1990). Optimal Incentive-Compatible Priority Policy for the M/M/1 Queue. Operations Research, 38, 870–883.
- NEMHAUSER, G.L., WOLSEY, L.A. (1988). Integer and Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons 763 p.
- ÖNAL, H. (1990). A Modified Simplex Approach for Solving Bilevel Linear Programming Problem. European Journal of Operational Research, 67, 126–135.
- SAVARD, G. (1988). Contribution à La Programmation Mathématique à Deux Niveaux. Thèse de Doctorat 1988, Ecole Polytechnique de Montréal 127 p.
- WANG, Q., PEHA, J.M., SIRBU, M.A. (1995). The Design of an Optimal Pricing Scheme for ATM Integrated-Services Networks, Presented at MIT Workshop on Internet Economics March 1995. <http://www.press.umich.edu/jep/works/WangOptPri.html>, 17 p.

ANNEXE

Annexe A

Tableaux des prix pour les problèmes P_1 , P_2 et P_3

Tableau A.1 Les prix optimaux pour les trois modèles du problème P_1

				prix w pour les modèles		
paire		arc a		DPF	nombres entiers	
O_p	D_p	O_a	D_a		w différents	w identiques
1	21	1	2	1.700875	1.70022	1.700222
1	21	4	8	0.0000	3.00778	8.909778
1	21	5	6	0.0000	0.098	2.988944
1	21	9	10	2.10497	7.319556	4.9980
1	21	12	11	0.000	4.304444	0.4964444
1	21	15	16	0.0000	2.904	-0.000
1	21	16	15	2.099762	0.0000	-0.002
1	21	20	21	2.09328	-2.215111	1.592889

Tableau A.2 Les prix optimaux pour les trois modèles du problème P_2

				prix w pour les modèles		
paire		arc a		DPF	nombres entiers	
O_p	D_p	O_a	D_a		w différents	w identiques
1	21	1	2	1.70044	1.700111	1.700111
1	21	4	8	0.602125	1.500111	2.300111
1	21	5	6	0.0000	1.9010	0.399
1	21	9	10	1.501558	6.507889	1.735259
1	21	12	11	0.0000	3.500333	0.6297037
1	21	15	16	0.0000	3.00111	-0.001
1	21	16	15	2.09989	0.0000	-0.001
1	21	20	21	2.096664	-1.405667	1.464963
1	21	21	20	0.000	1.40611	1.464963
7	4	2	1	0.19844	1.600111	1.7000111
7	4	4	8	0.0000	0.0000	2.300111
7	4	6	5	1.000002	0.3990	0.3990
7	4	8	4	2.300455	2.300111	2.300111
7	4	10	9	0.900002	0.0990	1.735259
7	4	12	11	0.298453	1.199111	0.6297037
7	4	15	16	0.0000	2.001889	-0.001
7	4	21	20	0.0000	1.501	1.464963

Tableau A.3 Les prix optimaux pour les trois modèles du problème P_3

				prix w pour les modèles		
paire		arc a		DPF	nombres entiers	
O_p	D_p	O_a	D_a		w différents	w identiques
1	21	1	2	1.700313	1.700074	1.39163
1	21	4	8	0.0000	3.003185	2.300667
1	21	5	6	0.0000	1.900667	1.192222
1	21	9	10	2.106113	1.401852	0.7951852
1	21	12	11	0.0000	-1.603185	-0.001851852
1	21	15	16	0.0000	2.101333	2.100148
1	21	16	15	2.098509	0.0000	2.100148
1	21	20	21	2.095713	3.69963	2.096519
1	21	21	20	0.000	0.000	2.096519
2	9	2	1	1.201832	0.1987407	1.39163
2	9	6	5	0.4015407	3.7020	1.192222
2	9	8	4	0.79748	0.7957778	2.300667
2	9	10	9	0.00	1.7982222	0.7951852
2	9	12	11	0.793896	0.800	-0.001851852
2	9	15	16	0.2950647	0.000	2.100148
2	9	16	15	0.000000	0.1987407	2.100148
2	9	21	20	0.495091	0.5006	2.096519
7	4	2	1	0.598461	1.600074	1.39163
7	4	6	5	0.6005407	2.200667	1.192222
7	4	8	4	2.301184	2.299481	2.300667
7	4	10	9	0.500175	3.803704	0.7951852
7	4	12	11	0.697836	0.7988148	-0.001851852
7	4	16	15	0.0000	0.299333	2.100148
7	4	21	20	0.0000	2.101852	2.096519